



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Dacă două lentile au distanțe focale f_1 , respectiv f_2 și le punem la o distanță $d > 0$ una față de cealaltă, cuplul astfel realizat va funcționa ca o nouă lentilă cu distanța focală f dată de legea $f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$.
- a) Notând $f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$, să se arate că "o" este lege de compoziție pe mulțimea $D = [d; +\infty)$.
- b) Să se arate că funcția $\varphi: [d; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, $\varphi(f) = 1 - \frac{d}{f}$ are proprietatea $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$, pentru orice $f_1, f_2 \in [d; +\infty)$.
- c) Să se arate că $(D; \circ)$ este structură asociativă.
- d) Să se arate că pentru orice $f \in D$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{d \cdot f^n}{f^n - (f - d)^n}$ și să se determine f în situația în care există $n \in \mathbb{N}^*$ lentile identice și cu distanța focală f , care funcționează ca o lentilă cu distanța focală $2d$.
2. Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t = 0$, 100 de bacterii. S-a constatat că, pentru orice $t > 0$, funcția $n: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, definită prin $n(t) = \text{numărul bacteriilor din vas la momentul } t$, verifică relația $n'(t) = 0,25 \cdot n(t)$, unde n' este derivata funcției $n = n(t)$.
- a) Determinați funcția n cu această proprietate.
- b) Arătați că $e^x \geq x + 1$, (\forall) $x \in \mathbb{R}$ și utilizând eventual acest rezultat, demonstrați că numărul bacteriilor din vas la momentul $t = 77$ depășește 2015.
3. Fie $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă, astfel încât $f(1) = 0$ și $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}$.
- a) Arătați că $\int_0^1 (2xf'(x) - x^2) dx = \frac{1}{3}$.
- b) Demonstrați că $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{3}$.
- c) Determinați funcția f pentru care avem egalitate în relația demonstrată la punctul b).
4. Pe o tablă sunt scrise mai multe numere, printre care și numerele 2013, 2014, 2015, 2016, 2017. Un elev șterge, la întâmplare, două dintre numerele scrise și dacă numerele șterse sunt a și b , în locul unuia dintre ele scrie numărul $a * b = ab - 2015(a + b) + 2015 \cdot 2016$. Se cere:
- a) Verificați $a * b = (a - 2015)(b - 2015) + 2015$.
- b) Aflați ultimul număr scris pe tablă în situația în care elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur număr.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.