INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ 19 martie 2016

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. Se cere:

a) Determinați primitiva $F:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, știind că $F(0)=0$.

b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

c) Dacă $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x\ge 0$ se verifică egalitatea $x+\int_0^x g(t)\,dt=(x+1)\cdot g(x)$, arătați că $g=f$.

Soluție:

a) $F(x)=\int\ln(x+1)\,dx=\int(x+1)'\cdot\ln(x+1)\,dx=(x+1)\cdot\ln(x+1)-\int dx=$

$=(x+1)\cdot\ln(x+1)-x+C,\ (\forall)\ C\in\mathbb{R}$ .... 2 puncte

$F(0)=0\ \Rightarrow\ C=0$ .... 1 punct

b) $\int_0^{e-1} f(x)\,dx=F(e-1)-F(0)=1$ .... 2 puncte

c) $G(x)=(x+1)\cdot g(x)-x$ este primitivă a funcției g și $G(0)=0\ \Rightarrow$ deducem $(x+1)\cdot g'(x)=1$ și $g(0)=0$ .... 1 punct

$g(x)=\ln(x+1)$ .... 1 punct

2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y$. Se cere:

a) Arătați că legea "$\circ$" nu este asociativă.

b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Găsiți două numere $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

d) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n^3\circ n\ne 2016$.

Soluție:

a) Spre exemplu, $(0\circ 1)\circ 2\ne 0\circ(1\circ 2)$ .... 2 puncte

b) Dacă $e\in\mathbb{R}$ este element neutru, atunci $x\circ e=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow xe+2x+2e=x\Rightarrow e(x+2)=-x$ .... 1 punct

și folosind unicitatea elementului neutru sau alegând $x=-2\ \Rightarrow\ 0=-2$, rezultă că $(\mathbb{R};\circ)$ nu are element neutru. .... 1 punct

c) Observând $x\circ y=(x+2)(y+2)-4$, se poate alege, spre exemplu, $a=\sqrt{3}-2$, $b=2\sqrt{3}-2$ și cu aceste numere avem $a\circ b=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-4=2\in\mathbb{N}$ .... 2 puncte

d) Fie $n^3 \circ n = 2016$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^4 + 2n^3 + 2n = 2016$ și considerând $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^4 + 2n^3 + 2n$, este strict crescătoare. Dar $f(6) < 2016$, $f(7) > 2016$ $\Rightarrow$ $f(n) \neq 2016$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$

.... 1 punct

3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzeşte un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x \in [0; +\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția

$$t : [0; +\infty) \to \mathbb{R},\ t(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{dacă } x \in [0; 3] \\ 5x - 1, & \text{dacă } x \in (3; 6) \\ 29, & \text{dacă } x \in [6; +\infty) \end{cases}$$

a) Arătați că funcția $t : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a; b] \subset [0; +\infty)$.

b) Ştiind că $M(a; b) = \dfrac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții f care este integrabilă pe un interval $[a; b] \subset \mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$.

c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0 = 0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Soluție:

a) Singurele posibile puncte de discontinuitate sunt $x = 3$ și $x = 6$ și se constată t continuă și în aceste puncte, deci admite primitive .... 1 punct

Fiind continuă pe orice interval $[a; b] \subset [0; +\infty)$, este și integrabilă .... 1 punct

b) Conform cu formula de medie, temperatura medie pentru intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$

este $M(4; 8) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_4^8 t(x)\,dx = \dfrac{1}{4}\left(\int_4^6 t(x)\,dx + \int_6^8 t(x)\,dx\right)$ .... 1 punct

$\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_4^6 t(x)\,dx = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5x^2}{2} - x\right)\Bigg|_4^6 = 12$ .... 1 punct

$\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_6^8 t(x)\,dx = \dfrac{1}{4} \cdot 29x\Big|_6^8 = 14{,}5$, deci $M(4; 8) = 26{,}5$ grade Celsius .... 1 punct

c) Trebuie determinat x astfel încât $M(0; x) = 20$, adică $\dfrac{1}{x} \cdot \displaystyle\int_0^x t(u)\,du = 20$

$x \in [0; 3] \Rightarrow M(0; x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (u^2 + u + 2)\,du = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{u^3}{3} + \dfrac{u^2}{2} + 2u\right)\Bigg|_0^x = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{2} + 2 \le \dfrac{13}{2} < 20$

$x \in (0; 6) \Rightarrow M(0; x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t(u)\,du = \dfrac{1}{x}\left[\int_0^3 t(u)\,du + \int_3^x t(u)\,du\right] = \dfrac{5x}{2} - 1 < 20$ .... 1 punct

$x \in [6; +\infty) \Rightarrow M(0; x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t(u)\,du = \dfrac{1}{x}\left[\int_0^6 t(u)\,du + \int_6^x t(u)\,du\right] = \dfrac{1}{x}(29x - 90)$

și ecuația $\dfrac{1}{x}(29x - 90) = 20$ are soluția $x = 10$ .... 1 punct

4. Fie mulțimea $M=\{a^2-ab+b^2 / a, b\in\mathbb{Z}\}$ și numărul complex $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2=-1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$

b) Arătați că, pentru orice $a, b\in\mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2-ab+b^2=(a+\varepsilon\cdot b)(a+\bar{\varepsilon}\cdot b)$,

unde $\bar{\varepsilon}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) Demonstrați egalitatea $(a_1^2-a_1b_1+b_1^2)\cdot(a_2^2-a_2b_2+b_2^2)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$,

unde $\alpha=a_1a_2-b_1b_2$, $\beta=a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ și $a_1, b_1, a_2, b_2\in\mathbb{Z}$.

d) Găsiți două numere $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ astfel încât $(2016^2-2016\cdot 2015+2015^2)^2=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$.

Soluție:

a) Justifică $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$ .... 1 punct

b) $(a+\varepsilon\cdot b)(a+\bar{\varepsilon}\cdot b)=a^2+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\cdot ab+(\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon})\cdot b^2=a^2-ab+b^2$ .... 2 puncte

c) Se demonstrează implicația $x, y\in M \Rightarrow x\cdot y\in M$

$x=a_1^2-a_1b_1+b_1^2=(a_1+\varepsilon\cdot b_1)(a_1+\bar{\varepsilon}\cdot b_1)$, $y=a_2^2-a_2b_2+b_2^2=(a_2+\varepsilon\cdot b_2)(a_2+\bar{\varepsilon}\cdot b_2)$ .... 1 punct

$\Rightarrow x\cdot y=(a_1+\varepsilon\cdot b_1)(a_2+\varepsilon\cdot b_2)\cdot\overline{(a_1+\varepsilon\cdot b_1)(a_2+\varepsilon\cdot b_2)}=$ .... 1 punct

$=(\alpha+\varepsilon\cdot\beta)\cdot\overline{(\alpha+\varepsilon\cdot\beta)}=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$, cu $\alpha=a_1a_2-b_1b_2$, $\beta=a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ .... 1 punct

d) Folosim punctul c) pentru $a_1=a_2=2016$, $b_1=b_2=2015$ și obținem $\alpha=4031$, $\beta=2015\cdot 2017$

.... 1 punct