

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



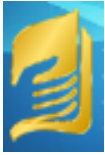
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## CLASA A XI-A

1. Fie matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Se cere:
  - a) Arătați că  $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I_2$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
  - b) Demonstrați că nu există  $X \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^3 \cdot X - X \cdot A^3 = B$ .
  - c) Arătați că egalitatea  $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$  este adevărată dacă și numai dacă  $a \cdot c = 0$ .
2. Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 + x + 1$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3e^x - 2x + 1$ . Se cere:
  - a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 1$ ;
  - b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) \cdot g(x) - g(0) \cdot f(x)}{x}$
  - c) Determinați numerele  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot g(x+1) + b \cdot f(x)}{x}$  există și este egală cu 2.
3. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}$ , cu  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Se cere:
  - a) Arătați că  $\det A = (a-b)(c-3)$ .
  - b) Demonstrați că pentru  $a=3, b=2, c=4$ , matricea  $A$  este inversabilă și inversa  $A^{-1}$  are toate elementele numere întregi.
  - c) Determinați o matrice  $C \in M_3(\mathbb{Z})$ , inversabilă și astfel încât să aibă inversa  $C^{-1}$  cu toate elementele numere naturale.
4. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea  $T(t) = a \cdot t^b + c - \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}$ , cu  $a, b, c, d > 0$ , unde numărul  $t \geq 0$  reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul  $T(t)$  reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment  $t \geq 0$  ales. Se știe că la momentul inițial  $t=0$  temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când  $t \rightarrow \infty$ , temperatura corpului se apropie infinitesimal de 10 grade Celsius, adică  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 10$ .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

a) Arătați că  $c = 12$ .

b) Demonstrați că  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$ , unde  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ .

c) Arătați că  $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2 + 4t + 25}$ .

d) Determinați la ce moment  $t$  temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment  $t \geq 0$ , temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.