

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



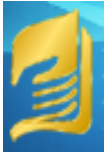
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## CLASA A XII-A

1. Fie funcția  $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x)$ . Se cere:
  - a) Determinați primitiva  $F : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ , știind că  $F(0) = 0$ .
  - b) Calculați  $\int_0^{e-1} f(x) dx$ .
  - c) Dacă  $g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție derivabilă încât pentru orice  $x \geq 0$  se verifică egalitatea  $x + \int_0^x g(t) dt = (x+1) \cdot g(x)$ , arătați că  $g = f$ .
2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție  $x \circ y = xy + 2x + 2y$ . Se cere:
  - a) Arătați că legea " $\circ$ " nu este asociativă.
  - b) Cercetați dacă structura algebrică  $(\mathbb{R}; \circ)$  admite element neutru.
  - c) Găsiți două numere  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  astfel încât  $a \circ b \in \mathbb{N}$ .
  - d) Demonstrați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3 \circ n \neq 2016$ .
3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată  $t(x)$  și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment  $x \in [0; +\infty)$  al măsurării, exprimat în minute, prin funcția
$$t : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{dacă } x \in [0; 3] \\ 5x - 1, & \text{dacă } x \in (3; 6) \\ 29, & \text{dacă } x \in [6; +\infty) \end{cases}$$
  - a) Arătați că funcția  $t : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  admite primitive și este integrabilă pe orice  $[a; b] \subset [0; +\infty)$ .
  - b) Știind că  $M(a; b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$  exprimă valoarea medie a unei funcții  $f$  care este integrabilă pe un interval  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ , calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor  $a = 4$  și  $b = 8$ .
  - c) Determinați după câte minute de la momentul inițial  $x_0 = 0$ , temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

4. Fie mulțimea  $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  și numărul complex  $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ,  $i^2 = -1$ .
- a) Arătați că  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$  și  $\varepsilon^3 = 1$
- b) Arătați că, pentru orice  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se verifică egalitatea  $a^2 - ab + b^2 = (a + \varepsilon \cdot b)(a + \bar{\varepsilon} \cdot b)$ ,  
unde  $\bar{\varepsilon} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  este conjugatul numărului complex  $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .
- c) Demonstrați egalitatea  $(a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2) \cdot (a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ ,  
unde  $\alpha = a_1a_2 - b_1b_2$ ,  $\beta = a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2$  și  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ .
- d) Găsiți două numere  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $(2016^2 - 2016 \cdot 2015 + 2015^2)^2 = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2$ .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.