INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEȚEANĂ
## 19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**CLASA A XII-A**

**1.** Fie funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. Se cere:

a) Determinați primitiva $F:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $f$, știind că $F(0)=0$.

b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

c) Dacă $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x\ge 0$ se verifică egalitatea $x+\int_0^x g(t)\,dt=(x+1)\cdot g(x)$, arătați că $g=f$.

**2.** Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y$. Se cere:

a) Arătați că legea ”$\circ$” nu este asociativă.

b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Găsiți două numere $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

d) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n^3\circ n\ne 2016$.

**3.** În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x\in[0;+\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția

$$t:[0;+\infty)\to\mathbb{R},\ t(x)=\begin{cases} x^2+x+2, & \text{dacă } x\in[0;3] \\ 5x-1, & \text{dacă } x\in(3;6) \\ 29, & \text{dacă } x\in[6;+\infty) \end{cases}$$

a) Arătați că funcția $t:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a;b]\subset[0;+\infty)$.

b) Știind că $M(a;b)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții $f$ care este integrabilă pe un interval $[a;b]\subset\mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a=4$ și $b=8$.

c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0=0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

***Notă:*** *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**4.** Fie mulțimea $M = \left\{a^2 - ab + b^2 \,/\, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ și numărul complex $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $i^2 = -1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$

b) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2 - ab + b^2 = (a + \varepsilon \cdot b)\left(a + \overline{\varepsilon} \cdot b\right)$,

unde $\overline{\varepsilon} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

c) Demonstrați egalitatea $\left(a_1^2 - a_1 b_1 + b_1^2\right) \cdot \left(a_2^2 - a_2 b_2 + b_2^2\right) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$,

unde $\alpha = a_1 a_2 - b_1 b_2$, $\beta = a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2$ și $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.

d) Găsiți două numere $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\left(2016^2 - 2016 \cdot 2015 + 2015^2\right)^2 = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2$.

***Notă:*** *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*