CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A IX-A

I. Se consideră numerele reale $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{2007},\ a_{2008}$, în această ordine, în progresie aritmetică şi $S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2007}^2 - a_{2008}^2$.

Să se arate că: $S = \frac{1004}{2007} \cdot \left(a_1^2 - a_{2008}^2\right)$.

II. Fie $a_n = 2^n \cdot 3^{1-n},\ \ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât suma $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{130}{27}$.

III. Fie ecuația de gradul al doilea în necunoscuta x: $2n \cdot x^2 - 2\left(n^2+1\right) \cdot x - n^2 - 1 = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar. Să se arate că rădăcinile ecuației sunt reale, distincte şi iraționale.

IV. Se dă familia de parabole :

$$y = \left(m-1\right)x^2 - \left(8m-3\right)x + 15m + 6,\ \ m \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că toate parabolele familiei trec prin două puncte ale căror coordonate nu depind de *m.*

b) Să se arate că dreapta determinată de cele două puncte conține o infinitate de puncte cu coordonatele numere întregi.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7