

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008

Filiera tehnologică : profil servicii, și resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

I. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numărul complex $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$. Arătați că $z \in \{-2, 0, 2\}$.

II. a) Dacă $a, b \in [1, \infty)$ să se demonstreze că $\frac{a+b}{1+ab} \leq 1$.

b) Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că, dacă :
 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [1, \infty)$, atunci $\frac{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)}{1+x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

III. Fie $\alpha > 1$ și funcția $f_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_\alpha(x) = (1+\alpha)^x - \alpha^x$.

a) Demonstrați că f_α este pozitivă și strict crescătoare.

b) Să se rezolve ecuația: $2008^x - 2007^x = 1 + 3 \left(2007^{\frac{x}{3}} + 2007^{\frac{2x}{3}} \right)$.

IV. Avem șapte saci , fiecare cu același număr de mere. În prima zi se scoate un măr dintr-un sac, în a doua zi se scoate câte un măr din doi saci, și așa mai departe, până în ziua a șaptea când se scoate câte un măr din fiecare sac. În acest mod toți sacii sunt goliți.

a) Câte mere sunt în fiecare sac?

b) Indicați un mod de efectuare a acestor operații succesive care să răspundă cerințelor problemei.

Nota: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7