CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

BAREM clasa a XI-a

I. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{11} \end{pmatrix}$ ……………………………………………..………………………..…….2p

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=a_{12}+a_{11}+a_{23}=a_{13}+a_{23}+a_{11}=m$ …………………..………………………..1p

$a_{13}=a_{23}=a_{12}=k\in\mathbb{Z}$ …………………………………………………….……………………1p

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & k & k \\ k & a_{11} & k \\ k & k & a_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=a_{11}^3+2k^3-3k^2a_{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A)=(m-2k)^3+2k^3-3k^2(m-2k)=m(m-3k)^2$ ……………...…….…………….….2p

$m\cdot\det(A)=m^2(m-3k)^2$ ………………………………………...…………………….1p

SAU: $m\cdot\det(A)=m\begin{vmatrix} a_{11}+2k & k & k \\ a_{11}+2k & a_{11} & k \\ a_{11}+2k & k & a_{11} \end{vmatrix}=m^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & a_{11} & k \\ 1 & k & a_{11} \end{vmatrix}=m^2\cdot(a_{11}-k)^2=m^2\cdot(m-3k)^2$

TOTAL 7 puncte

II. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln(2x+1)-2\ln(x+2)+\ln x-\ln(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)\right]=$

$=2\ln 2$ …………………...………………………………...………………………2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2lx}{\sqrt{kx^2+lx+m}+\sqrt{kx^2-lx+m}}=\frac{l}{\sqrt{k}}=1$ ……….…………..…………..………..……2p

$k=l^2<5\Rightarrow k\in\{1,4\}$ şi $l\in\{1,2\}$ ……………………………………….………………….1p

Cum $k\le m<5$, deducem că:

$(k,l,m)\in\{(1,1,1);(1,1,2);(1,1,3);(1,1,4);(4,2,4)\}$ …………………..……...……………2p

TOTAL 7 puncte

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

III. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_3$ 2p

b) $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ 1p

$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ 2p

c) $X^2 = A \Rightarrow X^3 = A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ 1p

$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$ (fals)..1p

TOTAL 7 puncte

IV. a) Dacă $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ cu $x_i, y_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1,3}$, atunci

$S = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{Q}$ 3p

b) Dacă triunghiul ar fi echilateral şi notăm cu l lungimea laturii acestuia avem

$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \in \mathbb{Q}$ (fals)..4p

TOTAL 7 puncte