CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

CLASA a XI-a

I. Fie $A=\left(a_{ij}\right)\in M_3\left(\mathbb{Z}\right)$, o matrice simetrică $\left(a_{ij}=a_{ji},\ \forall i,j\in\overline{1,3}\right)$, astfel încât elementele de pe diagonala principală sunt egale, iar suma elementelor fiecărei linii este egală cu $m\in\mathbb{Z}$. Demonstrați că $m\cdot\det\left(A\right)$ este pătrat perfect.

II. a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln\left(2x+1\right)-3\ln\left(x+2\right)+\ln x\right]$.

b) Determinați $k,\ l,\ m\in\mathbb{N}^*,\ \ k\le m<5$ astfel încât:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{kx^2+lx+m}-\sqrt{kx^2-lx+m}\right)=1.$$

III. Fie $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $M=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}/\,a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

a) Calculați A^3.

b) Dacă $A\cdot X=X\cdot A,\ \ X\in M_3\left(\mathbb{C}\right)$ demonstrați că $X\in M$.

c) Demonstrați că ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $M_3\left(\mathbb{C}\right)$.

IV. Pe o suprafață plană, raportată la reperul ortogonal $\left(xOy\right)$, trei persoane se aşează în trei puncte necoliniare A, B, C, astfel încât coordonatele acestor puncte să fie numere întregi. Demonstrați că:

a) $S\in\mathbb{Q}$, unde S este aria triunghiului ABC.

b) Cele trei persoane nu se pot aşeza în vârfurile unui triunghi echilateral.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7