

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera tehnologică : profil servicii, și resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

1. Fie $G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

- a) Calculați A^3 , $A \in G$.
- b) Arătați că (G, \cdot) este grup necomutativ.
- c) Câte elemente are grupul (G, \cdot) ?

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + 4x + 5}$ să fie funcții raționale.

3. Se consideră grupul (K, \cdot) , unde $K = \{e, a, b, c\}$, e elementul neutru și $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

- a) Să se rezolve ecuația $x^3 = e$, în grupul (K, \cdot) .
- b) Să se arate că $ab = c$.
- c) Să se arate că grupurile (K, \cdot) și $(\mathbb{Z}_4, +)$ nu sunt izomorfe.

4. Considerăm funcția $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t) \sin t}{\cos^2 t} dt$.

- a) Calculați $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- b) Demonstrați că f este strict monotonă.
- c) Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2}$.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7