CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a IX-a

1. a) Dacă x, y, z reprezintă numărul de cutii de câte 6, 9, respectiv 20 bucăți trebuie să avem: $6x+9y+20z=33$ 1p

Este necesar ca $z\in\{0,1\}$ 2p

Din $z=0\Rightarrow 2x+3y=11\Rightarrow (x,y)\in\{(1,3);(4,1)\}$ 1p

Din $z=1\Rightarrow 6x+9y=13$ (Fals)....................1p

b) Dacă $6x+9y+20z=43\Rightarrow z\in\{0,1,2\}$ 1p

Din $\left.\begin{array}{l} z=0\Rightarrow 6x+9y=43(\text{fals}) \\ z=1\Rightarrow 6x+9y=23(\text{fals}) \\ z=2\Rightarrow 2x+3y=1(\text{fals}) \end{array}\right\}$ 1p

2. $S=a_1+a_2+a_3+...+a_{10}=5\cdot(a_1+a_{10})$ 1p

$a_{10}=\frac{18}{r}+9r$ 1p

<u>VARIANTA 1</u>

$S=5\left(9r+\frac{36}{r}\right)=45\cdot\left(r+\frac{4}{r}\right)$ 2p

$S=45\cdot\left[\left(\frac{2}{\sqrt{r}}-\sqrt{r}\right)^2+4\right]$ 1p

$S_{\min}=180,$ pentru $r=2$ 1p

Rezultă: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27....................1p

<u>VARIANTA 2</u>

$S=45\cdot\left(\frac{4}{r}+r\right)\geq 45\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{4}{r}\cdot r}=180$ (inegalitatea mediilor)....................1p

$S_{\min}=180$ pentru $r=2$ 1p

Rezultă: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27....................1p

3. <u>VARIANTA 1</u>

Ridicăm la pătrat ecuațiile sistemului, apoi le adunăm membru cu membru şi obținem: $x^2+y^2+z^2-4\cdot(xy+yz+zx)+4\cdot(x^2+y^2+z^2)=1$ 3p

Avem $5\cdot(x^2+y^2+z^2)-4\cdot(xy+yz+zx)=1(*)$

Dar : $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx(**)$ 2p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

Din $(*)$ şi $(**) \Rightarrow$

$5\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)=1+4\cdot(xy+yz+zx)\le 1+4\left(x^2+y^2+z^2\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1$ 2p

VARIANTA 2

$\begin{cases} x-2y=a \\ y-2z=b/\cdot 2 \\ z-2x=c/\cdot 4 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{7}(a+2b+4c)$ 1p

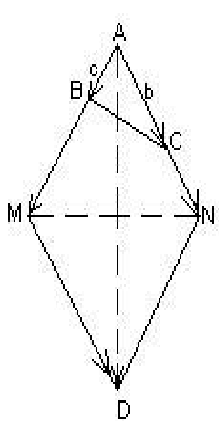
$\begin{cases} x-2y=a/\cdot 4 \\ y-2z=b \\ z-2x=c/\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{1}{7}\cdot(4a+b+2c)$ 1p

$\begin{cases} x-2y=a/\cdot 2 \\ y-2z=b/\cdot 4 \\ z-2x=c \end{cases} \Rightarrow z=-\frac{1}{7}\cdot(2a+4b+c)$ 1p

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{1}{49}\cdot\left[21+28\cdot(ab+bc+ca)\right]$ 2p

Cum: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1$ 2p

4.



a) $\left|\overrightarrow{AM}\right|=b\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|=bc;\ \left|\overrightarrow{AN}\right|=c\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=bc$ 2p

b)
$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=-b\cdot\overrightarrow{AB}+b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}=c\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}$ ....
....2p

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AN}\Rightarrow(MD)\equiv(AN)$ şi $MD\parallel AN$,
de unde *AMDN* paralelogram...1p

c) *AMDN* paralelogram şi $(AM)\equiv(AN)\Rightarrow$ $AMDN$ este romb..................1p

Rezultă (AD bisectoarea $\widehat{BAC}$ 1p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.