CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a XII-a

1.

a) Dem. asociativitatea şi comutativitatea 1p

Determină elementul neutru $e=0\in G$ 1p

Determină elementul simetric elementului $x\in G$ este $x'=-\dfrac{x}{1+x}\in G$ 1p

b) $\underbrace{x*x*x*...*x}_{n\ ori}=\left(x+1\right)^{n}-1,\ n\in\mathbb{N}^{*}$ 1p

$\left(x+1\right)^{n}=2\Rightarrow x=\sqrt[n]{2}-1\in G$ 1p

c) $\begin{cases}x=a^{2}-1\\ y=b^{2}-1\end{cases}\in H\Rightarrow x*y=\left(x+1\right)\left(y+1\right)-1=\left(ab\right)^{2}-1\in H$ 1p

Dacă $x=a^{2}-1\in H\Rightarrow x'=-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{1-a^{2}}{a^{2}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2}-1\in H$ 1p

2. a) $t=\dfrac{1}{u}\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{u^{2}}du$ şi verifică egalitatea 2p

b) Din a) $\Rightarrow \text{arctg } t\Big|_{x}^{1}=\text{arctg } t\Big|_{1}^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \text{arctg } x+\text{arctg } \dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2},x>0$ 2p

c) $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow I\left(a\right)=-\int_{a}^{\frac{1}{a}}\dfrac{\text{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{\text{t}}dt$ 1p

$I\left(a\right)=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{1}{t}\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg } t\right)dt$ 1p

$I\left(a\right)=\dfrac{\pi}{2}\ln t\Big|_{\frac{1}{a}}^{a}-I\left(a\right)\Rightarrow I\left(a\right)=\dfrac{\pi}{2}\ln a$ 1p

3. a) $\left(4x^{3}-6x^{2}+8x-3\right):\left(x^{2}-x+1\right)$ dă câtul $\left(4x-2\right)$ şi restul $\left(2x-1\right)$.

Aşadar: $4x^{3}-6x^{2}+8x-3=2\left(2x-1\right)\left(x^{2}-x+1\right)+\left(2x-1\right)$ 1p

$I=2\cdot\int_{0}^{2}\dfrac{2x-1}{\left(x^{2}-x+1\right)^{2}}dx+\int_{0}^{2}\dfrac{2x-1}{\left(x^{2}-x+1\right)^{3}}dx$ 1p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

$I_1=\int_0^2 \frac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx=-\frac{1}{x^2-x+1}\Big|_0^2=\frac{2}{3}$ 1p

$I_2=\int_0^2 \frac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^3}dx=-\frac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}\Bigg|_0^2=\frac{4}{9}$

$I=I_1+I_2=\frac{16}{9}$ 1p

b) $I(x)=\int x'\cdot e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{x+\frac{1}{x}}dx$ 1p

$I(x)=xe^{x+\frac{1}{x}}dx-\int x\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$ 1p

$I(x)=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$ 1p

VARIANTĂ (pentru punctul b)

$\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}=\left[1+x\left(x+\frac{1}{x}\right)'\right]e^{x+\frac{1}{x}}$ 1p

Expresia de mai sus este $\left(x\cdot e^{x+\frac{1}{x}}\right)'$ 1p

Deci $I(x)=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$ ....1p.

4. Elevul poate colora toate punctele de coordonate întregi situate pe dreptele de ecuații: $x=0, x=1, y=0, y=1$ 3p

Considerând punctele $M_k(k,0)$ și $N_k(k,1)$, $k\in\mathbb{Z}$ elevul poate colora toate punctele de ordonată întreagă de pe dreptele de ecuații $x=k,\ k\in\mathbb{Z}$ 4p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.