CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

1. O matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ verifică condițiile: $\det(A-3I_2)=4$ şi $\det(A+2I_2)=9$, I_2 fiind matricea unitate de ordinul al doilea.
Demonstrați că : $A^2 = 2A - I_2$.

2. Un determinant de ordin $n \geq 2$ are $(n^2 - n + 2)$ elemente egale. Demonstrați că determinantul este nul.

3. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 2}$.
a) Determinați limitele laterale ale funcției f în punctele $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$.
b) Calculați : $l_1 = \lim\limits_{x\to\infty} e^x \cdot \left[e^{-x} \right]$ și $l_2 = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \left[e^x \right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*, iar *e* este baza logaritmului natural.

4. Arătați că nu există polinoame *P, Q*, cu coeficienți reali,
$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $a_0 \neq 0$ și $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$, $b_0 \neq 0$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât: $P(x) = x\sqrt{x^2+1} \cdot Q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7