CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a IX-a

1. Pe un bulevard sunt 100 de felinare, numerotate 1, 2, ..., 100. Inițial, pentru decor, felinarele 1, 4, 7, ... (la fel în continuare) sunt cu lumină galbenă iar restul cu lumină albă. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, începând de la felinarul 100 şi în sens descrescător din doi în doi, la fiecare felinar întâlnit se adaugă un filtru albastru. Astfel, datorită proprietății culorilor derivate, o parte din felinare rămân cu lumină albă, o parte rămân cu lumină galbenă, o parte devin cu lumină albastră (alb + albastru = albastru) iar o parte devin cu lumină verde (galben + albastru = verde). Aflați câte din cele 100 de felinare vor fi din fiecare culoare.

<u>Soluție:</u>
Inițial sunt galbene felinarele cu numerele de ordine 1, 4, 7, ..., 97, 100, adică cele cu numerele de forma $3k+1$, cu $k \in \{0;1;2;...;33\}$, în număr total de 34 felinare **1p**
Filtrul albastru se aplică felinarelor 100, 98, 96, ..., 4, 2, deci la toate cu numărul de ordine par, în număr total de 50 felinare **1p**
Dintre felinarele inițial galbene au număr de ordine par cele cu numărul de ordine $3k+1$ şi care au k impar, adică cele cu $k \in \{1;3;5;7;...;33\}$, în număr total de 17 felinare **1p**
Deci <u>exact **17 felinare** - care inițial au fost galbene - vor deveni **verzi**</u> **1p**
Cum $34-17=17$, restul de <u>**17 felinare** rămân **galbene**</u> **1p**
Cum $50-17=33$, restul de <u>**33 felinare** vor deveni **albastre**</u> **1p**
Cum $100-(17+17+33)=33$, restul de <u>**33 felinare** rămân **cu lumină albă**</u> **1p**

2. O sală de spectacol are locurile dispuse pe rânduri şi pe fiecare rând, începând cu al doilea, se află cu câte două locuri mai multe decât pe rândul precedent. Ştiind că pe primul rând sunt 38 de locuri, şi în total sala are 2010 locuri, aflați pe câte rânduri sunt dispuse locurile în acea sală.

<u>Soluție</u>
Fie a_1 numărul de locuri de pe primul rând, a_2 numărul de locuri de pe al doilea rând şi aşa mai departe **1p**
Conform cu cele descrise vom avea $a_1=38$, $a_2=40$, $a_3=42$, etc. **1p**
Deci $a_1, a_2, a_3, ...$ sunt în progresie aritmetică cu primul termen $a_1=38$ şi rația $r=2$ **1p**
Fie $n \in \mathbb{N}$ numărul rândurilor sălii şi conform enunțului $a_1+a_2+a_3+...+a_n=2010$, ceea ce înseamnă $\frac{n(a_1+a_n)}{2}=2010$ **1p**
cu $a_1=38$ şi $a_n=a_1+(n-1)\cdot r=2n+36$ **1p**
Se obține ecuația $n^2+37n-2010=0$ **1p**
ecuație care are soluția naturală $n=30$, deci **sala are 30 de rânduri** **1p**

3. Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$ se consideră ecuația $x^2 - 2x + (2011 - a) = 0$, notată $E(a)$.

a) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are rădăcini reale;

b) Determinați suma şi produsul rădăcinilor ecuației $E(a)$;

c) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are ambele rădăcini numere naturale.

d) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are ambele rădăcini numere raționale.

<u>Soluție:</u>

a) $E(a) \Leftrightarrow (x-1)^2 = a - 2010$, deci $E(a)$ are rădăcini reale $\Leftrightarrow a \geq 2010$,
sau rezolvare prin condiția $\Delta \geq 0$ **1p**
b) $x_1 + x_2 = 2$ **1p**
şi $x_1 \cdot x_2 = 2011 - a$ **1p**
c) Din $x_1 + x_2 = 2$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ se obține $(x_1; x_2) = (0; 2)$, în cazul $a = 2011$ **1p**
şi $(x_1; x_2) = (1; 1)$, în cazul $a = 2010$ **1p**
d) Din $(x-1)^2 = a - 2010 = k^2$, $k \in \mathbb{Q}$, ... **1p**
rezultă $a = k^2 + 2010$, $k \in \mathbb{Q}$ **1p**

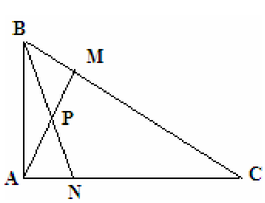
4. O foaie de tablă este de forma unui triunghi ABC dreptunghic în A şi cu $m(\sphericalangle ACB) = 36^0$. Se trasează pe foaie segmentele $[AM]$, cu $M \in (BC)$ încât $CM = AC$ şi apoi $[BN]$ cu $N \in (AC)$ încât $AN = BM$. Să se demonstreze că:

a) dacă se notează $AM \cap BN = \{P\}$, punctul P este mijlocul segmentului $[BN]$;

b) dacă se taie foaia după segmentele $[AM]$ şi $[BN]$, se obțin trei triunghiuri isoscele.

<u>Soluție:</u>

Conform cu figura, din aplicarea teoremei lui Menelaus, avem $\dfrac{BP \cdot AN \cdot CM}{PN \cdot AC \cdot MB} = 1$, pentru ΔBNC şi punctele coliniare A, P, M **1p**
Se obține $BP = PN$ **1p**
Deoarece AP este mediană în triunghi dreptunghic, este jumătate din ipotenuză **1p**



Astfel triunghiurile PAB şi PAN sunt isoscele. **1p**
Din triunghiul isoscel $CAM \Rightarrow m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{CMA}) = 72^0$ **1p**
Obținem $m(\widehat{BMP}) = 108^0, m(\widehat{ABC}) = 54^0, m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{ABP}) = 18^0$ **1p**
$m(\sphericalangle MBP) = 36^0 = m(\sphericalangle MPB)$ (unghi exterior ΔPAB) **1p**