CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Demonstrați că legea este asociativă şi că $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

c) Demonstrați că mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ față de legea „$\circ$” şi că $(G;\circ)$ este grup comutativ;

d) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 2011^7 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Soluție</u>:

a) Verifică $2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1 = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$ **1p**

b) Folosind eventual punctul a) se justifică imediat $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1$ **1p**

c) Dacă $x \neq 1$ şi $y \neq 1$ atunci $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1 \neq 1$, deci $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă în mulțimea numerelor reale față de operația ”$\circ$”.. **1p**

Folosind eventual punctul b) se arată că $(G;\circ)$ este structură comutativă şi asociativă **1p**

cu element neutru $e = \dfrac{2012}{2011}$ **1p**

şi fiecare $x \in G$ este simetrizabil, cu simetricul $x' = \dfrac{1}{2011^2 (x-1)} + 1 \in G$ **1p**

d) Din subpunctele a) şi b) se deduce $x \circ y \circ z \circ t = 2011^3 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) \cdot (t-1) + 1$

şi ecuația devine $2011^3 \cdot (x-1)^4 + 1 = 2011^7 + 1$, din care $(x-1)^4 = 2011^4$, deci $x - 1 = \pm 2011$

şi ecuația are mulțimea soluțiilor $S = \{-2010; 2012\}$ **1p**

2. Demonstrați că:

a) $1 - x + x^2 - x^3 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$, oricare ar fi $x \in [0;1]$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ şi, folosind eventual a), deduceți că: $\dfrac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \dfrac{5}{6}$;

c) $\dfrac{455}{528} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \leq \frac{61}{66}$.

<u>Soluție</u>:

a) $1 - x + x^2 - x^3 \leq \dfrac{1}{1+x} \Leftrightarrow -x^4 \leq 0$ **1p**

$\dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^3$ **1p**

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$ .... **1p** din a) rezultă $\int_0^1 \left(1-x+x^2-x^3\right)\,dx \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \le \int_0^1 \left(1-x+x^2\right)\,dx$ **1p**

deci $\frac{7}{12} \le \ln 2 \le \frac{5}{6}$ **1p**

c) din a), înlocuind pe x cu x^5 obținem $1-x^5+x^{10}-x^{15} \le \frac{1}{1+x^5} \le 1-x^5+x^{10}$ **1p**

Rezultă $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \le 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{11} \Leftrightarrow \frac{455}{528} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \le \frac{61}{66}$ **1p**

3. Fie funcțiile f, g şi h definite prin: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$; $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$ şi $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases} f(x), \text{ dacă } x\in(-\infty;1) \\ g(x), \text{ dacă } x\in[1;+\infty) \end{cases}$

a) Justificați că funcțiile f, g, h sunt primitivabile şi calculați $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$, $\int h(x)\,dx$;

b) Justificați că funcția h este integrabilă pe $[0;e]$ şi calculați $\int_0^e h(x)\,dx$.

<u>Soluție</u>:

a) Funcțiile f şi g, fiind elementare, sunt continue pe domeniul lor, deci sunt primitivabile **1p**

$\int f(x)\,dx = \int (x-1)e^{-x}\,dx$ şi se determină aplicând integrare prin părți $\left.\begin{matrix} u=x-1 \\ v'=e^{-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u'=1 \\ v=-e^{-x} \end{cases}$ şi

$\int f(x)\,dx = \int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$ **1p**

$\Rightarrow \int f(x)\,dx = (1-x)\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = (1-x)\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -x\cdot e^{-x} + C = -\frac{x}{e^x} + C,\ C\in\mathbb{R}$ **1p**

$\int g(x)\,dx = \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$, $C\in\mathbb{R}$ **1p**

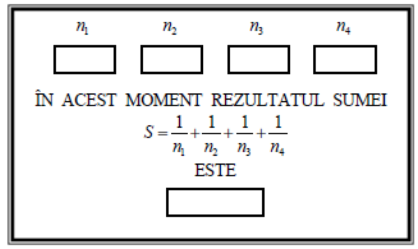
Funcția h este primitivabilă deoarece $h_s(1)=h_d(1)=h(1)$ şi în rest h este continuă, deci continuă pe $\mathbb{R}$ şi atunci $\int h(x)\,dx$ conține funcțiile $H(x)=\begin{cases} F(x)+C_1, \text{ dacă } x\in(-\infty;1) \\ G(x)+C_2, \text{ dacă } x\in[1;+\infty) \end{cases}$ unde $F(x)=-\frac{x}{e^x}$ şi $G(x)=\frac{\ln^3 x}{3}$ iar constantele C_1 şi C_2 sunt în condiția de derivabilitate pentru $H(x)$, adică

$-\frac{1}{e}+C_1=C_2$; $H(x)=\begin{cases} -xe^{-x}+C, \text{ dacă } x\in(-\infty;1) \\ \frac{1}{3}\ln^3 x - \frac{1}{e} + C, \text{ dacă } x\in[1;+\infty) \end{cases}$ **1p**

b) Deoarece $h_s(1)=h_d(1)=h(1)$, şi în rest h este continuă, h este integrabilă pe $[0;e]$.............. **1p**

şi $\int_0^e h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^e g(x)\,dx = \left(-\frac{x}{e^x}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{\ln^3 x}{3}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{3}-\frac{1}{e}$ **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului



4. Un program de calculator, funcționează astfel:
La deschidere afişează pe ecranul monitorului 5 căsuțe ca în figura alăturată şi solicită utilizatorului să scrie în fiecare din căsuțele n_1, n_2, n_3, n_4 câte un număr real nenul.
După scrierea celor patru numere reale n_1, n_2, n_3, n_4, în cea de a cincea căsuță programul afişează instantaneu rezultatul sumei $S=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$. În continuare programul lucrează astfel:
La fiecare click succesiv din mouse în oricare două din căsuțele n_1, n_2, n_3, n_4, în care să zicem că apar două numere a şi b, aceste numere sunt înlocuite automat cu numerele $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ şi $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$, cu afişare în a cincea căsuță a noului rezultat al sumei S;
Se cere să se demonstreze că:
a) Dacă $a\cdot b\neq 0$ atunci $a+b+\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$ şi $a+b-\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$;
b) Dacă $a\cdot b\neq 0$ atunci $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;
c) Dacă utilizatorul alege la pornire 4 numere şi pe monitor apare $S=2011$ atunci în orice moment al acelei aplicări a programului suma S afişată pe monitor rămâne permanent 2011;
d) Dacă utilizatorul alege la pornire numerele 8044, 8045, 8046 şi 8047, atunci în orice moment al acelei aplicări a programului nici unul din cele patru numere afişate nu va deveni 2011.

<u>Soluție</u>:
a) $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=0 \Leftrightarrow a+b=-\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow (a+b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow a\cdot b=0$ (fals) **1p**
Analog $a+b-\sqrt{a^2+b^2}=0 \Rightarrow a\cdot b=0$ (fals) **1p**
b) $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a+2b}{2ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ **1p**
c) Inițial suma inverselor numerelor din $M=\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ este $S=2011$. Dacă la un anume alt moment al aplicării programul afişează în căsuțele n_1, n_2, n_3, n_4 patru numere a, b, c, d într-o ordine oarecare şi cu suma $S=2011$ şi dacă utilizatorul aplică click din mouse pe "a" şi "b" atunci, conform cu punctul b), suma S rămâne tot 2011 .... **1p**
d) În condiția alegerii inițiale a numerelor 8044, 8045, 8046 şi 8047, în orice moment al utilizării programului pe ecran apare $S=\frac{1}{8044}+\frac{1}{8045}+\frac{1}{8046}+\frac{1}{8047}$ **1p**
$S<\frac{4}{8044}=\frac{1}{2011}$ **1p**
deci nici unul din cele patru numere n_1, n_2, n_3, n_4, care rămân pozitive, nu poate ajunge să fie 2011 **1p**