CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. Un automobil se deplasează cu viteza de $90\ km/h$ la vale, cu $72\ km/h$ pe loc drept şi cu $60\ km/h$ la deal. În aceste condiţii automobilul a parcurs distanţa de la oraşul A la oraşul B în 5 ore, iar distanţa de la oraşul B la oraşul A în 4 ore. Aflaţi distanţa dintre A şi B.

Soluţie:

Dacă x, y, z sunt distanţele în km parcurse de automobil la vale, pe loc drept şi la deal de la A la B 1p

Atunci x, y, z sunt distanţele parcurse de automobil la deal, pe loc drept şi la vale de la B la A 1p

$5=\frac{x}{90}+\frac{y}{72}+\frac{z}{60}$ 2p

$4=\frac{x}{60}+\frac{y}{72}+\frac{z}{90}$ 2p

$9=\frac{x+y+z}{36}, x+y+z=324\ km$ 1p

2. a) Demonstraţi că $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot....\cdot\log_{2011} 2012\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Fie z un număr complex, nenul, arătaţi că $\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}\in\mathbb{R}$.

Soluţie:

a) Se demonstrează că $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot....\cdot\log_{2011} 2012=\log_2 2012$ 2p

$\log_2 2012=2+\log_2 503$ 1p

Demonstram prin reducere la absurd ca $\log_2 503\notin\mathbb{Q}$ si rezulta ca nici $\log_2 2012\notin\mathbb{Q}$ 1p

b) $z=a+bi, a,b\notin\mathbb{R}, |z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 1p

$\frac{|z|}{z}=\frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 1p

$\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}\in\mathbb{R}$ 1p

3. a) Demonstraţi că $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, pentru orice $x,y\in[0,\infty)$.

b) Demonstraţi că $x+\frac{1}{x}\geq 2$ şi $2^x\cdot 3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}\cdot 3^x\geq 12$, pentru orice $x>0$ (puteţi utiliza şi inegalitatea mediilor).

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}^*$, ecuaţia $2^x\cdot 3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}\cdot 3^x+\left(\sqrt{6}\right)^{x+\frac{1}{x}}=18$.

Soluţie:

a) Demonstrează că $x+y\geq 2\sqrt{xy}, \forall x,y\geq 0$ 1p

b) $x+\frac{1}{x}\ge 2$ ………………………………………………………………………….….. 1p

$2^x\cdot 3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}\cdot 3^x\ge 2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}\cdot 3^{x+\frac{1}{x}}}\ge 2\sqrt{2^2\cdot 3^2}=12$ ……………………………………………… 2p

c) $x<0$ nu este soluţie …..………………………………………………………..……… 1p

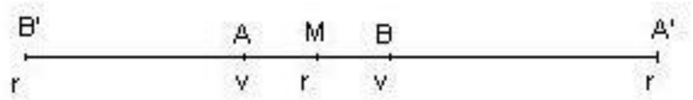
$x>0$; conform b) membrul stâng ≥ 18 .... 1p

Inegalitatea devine egalitate dacă $x+\frac{1}{x}=2$, deci $x=1$ .....…………………………………… 1p

4. Punctele spaţiului fizic obişnuit sunt colorate în mod arbitrar cu două culori.
Demonstraţi că există un segment ale cărui extremităţi şi mijloc sunt la fel colorate.

Soluţie:

Reducem la absurd (presupunem că nu există un astfel de segment). 1p
Fie verde şi roşu, cele două culori.
Considerăm un segment AB, având extremităţile colorate în verde.(există un astfel de segment, pentru că în caz contrar problema devine banală) 1p
Atunci mijlocul M al acestui segment este colorat cu roşu 1p



Fie A' simetricul punctului Afaţă de B şi B' simetricul punctului B faţă de punctul A 1p
Deoarece punctele A şi B sunt colorate cu verde, rezultă că punctele A' şi B' au culoarea roşu(în caz contrar punctele A, B şi A' sau B, A şi B' ar contrazice ipoteza făcută) 1p
Conform construcţiei făcute rezultă că punctul M este mijlocul segmentului $A'B'$ 1p
Dar punctele A', M şi B' sunt colorate cu roşu, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Aşadar, există un segment cu cerinţele problemei 1p