CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Fie $A=\{(x,y)/|x|+|y|\le 5\}$

a) Într-un reper ortoganal (xOy), rezolvând inecuaţiile corespunzătoare fiecarui cadran, reprezentaţi mulţimea *A*, prin haşurare.

b) Să se demonstreze că oricum am alege 101 puncte din A, există cel puţin două dintre acestea la o distanţă mai mică sau egală cu 1(împărţind pătratul prin paralele la laturi).

Soluţie:

a) A este formată din mulţimea punctelor pătratului *MNPQ*, $M(5,0);N(0,5);P(-5,0);Q(0,-5)$ 3p

b) Împărţim pătratul în 100 de pătrăţele de latură $\frac{\sqrt{2}}{2}$ prin paralele la laturile pătratului mare 2p

Cel puţin un pătrăţel conţine măcar 2 puncte 1p

Distanţa dintre aceste două puncte este cel mult egală cu diagonala , deci cu 1 .... 1p

2. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}+\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

Studiaţi existenţa limitei $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pentru $a=-\infty$, $a=0$, $a=1$ şi $a=\infty$.

Soluţie:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ 1p

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1-\sqrt{3}$ 1p

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2+x}{x^2-x}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\infty$ 2p

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\frac{1}{2}$ 1p

Nu există $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$ 1p

3. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Demonstraţi că $A^2+A-2I_3=O_3$

b) Demonstraţi că A este inversabilă şi determinaţi A^{-1}.

c) Rezolvaţi în $M_3(\mathbb{R})$, ecuaţia $AX=A^2-I_3$.

Soluţie:

a) Verifică egalitatea $A^2+A-2/_3=O_3$ 2p

b) $A\cdot\frac{1}{2}(A+I_3)=I_3 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 3p

c) $X=A^{-1}\left(A^2-I_3\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ 2p

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia $f(x-y)-xf(y)\le 1-x$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

a) Demonstraţi că $f(x)\le 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $1-\frac{1-f(0)}{x}\le f(x)\le 1$, pentru orice $x>0$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Determinaţi toate funcţiile *f* care verifică condiţia dată.

Soluţie:

a) Pentru $x=0\Rightarrow f(-y)\le 1, \forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$ 2p

b) pentru $x=y\Rightarrow f(0)-xf(x)\le 1-x\Rightarrow 1+\frac{f(0)-1}{x}\le f(x)$, pentru orice $x>0$. 1p

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ 1p

c) Pentru $x>0$ şi $y\in\mathbb{R}$ avem $\frac{f(x-y)}{x}-f(y)\le\frac{1}{x}-1$, deci $f(y)\ge\frac{f(x-y)}{x}-\frac{1}{x}+1$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x-y)}{x}-\frac{1}{x}+1\right)=1$ 1p

Rezultă $f(y)\ge 1, \forall y\in\mathbb{R}$ şi concluzia $f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$ 1p