

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**Clasa a X-a**

1. Un automobil se deplasează cu viteza de  $90 \text{ km/h}$  la vale, cu  $72 \text{ km/h}$  pe loc drept și cu  $60 \text{ km/h}$  la deal. În aceste condiții automobilul a parcurs distanța de la orașul  $A$  la orașul  $B$  în 5 ore, iar distanța de la orașul  $B$  la orașul  $A$  în 4 ore. Aflați distanța dintre  $A$  și  $B$ .
  
2. a) Demonstrați că  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \dots \cdot \log_{2011} 2012 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  
b) Fie  $z$  un număr complex, nenul, arătați că  $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R}$ .
  
3. a) Demonstrați că  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ , pentru orice  $x, y \in [0, \infty)$ .  
b) Demonstrați că  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  și  $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x \geq 12$ , pentru orice  $x > 0$  (puteți utiliza și inegalitatea mediilor).  
c) Rezolvați în  $\mathbb{R}^*$ , ecuația  $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x + (\sqrt{6})^{x + \frac{1}{x}} = 18$ .
  
4. Punctele spațiului fizic obișnuit sunt colorate în mod arbitrar cu două culori.  
Demonstrați că există un segment ale cărui extremități și mijloc sunt la fel colorate.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.