INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie matricile $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Determinaţi $a, b\in\mathbb{R}$ încât $A^2=a\cdot A+b\cdot I_3$

b) Demonstraţi că $(I_3+A)\left(I_3-\frac{1}{4}\cdot A\right)=I_3$

c) Demonstraţi că matricea $B=I_3+A$ este inversabilă şi calculaţi B^{-1}.

<u>Soluţie:</u>

a) $A^2=3\cdot A\Rightarrow a=3,\ b=0$ ……………………………………………………………2p

b) Arată $(I_3+A)\left(I_3-\frac{1}{4}\cdot A\right)=I_3$ ……………………………………………………………3p

c) Din b) (I_3+A) inversabilă ……………………………………………………………1p

$(I_3+A)^{-1}=I_3-\frac{1}{4}\cdot A$ ……………………………………………………………1p

2. Doi prieteni, Andrei şi Vasile, măsoară fiecare distanţa de acasă până la şcoală. Distanţa măsurată de Andrei este egală cu x km iar cea măsurată de Vasile este egală cu y km. Ştiind că există $a,b,c\in\{1;2;3\}$, nu neapărat distincte dar astfel încât se verifică sistemul

$$\begin{cases} x+2y=4\\ ax+\ \ y=5\\ cx+3y=b+6\end{cases}$$

determinaţi a, b, c şi distanţele x şi y.

<u>Soluţie:</u>

În cazul $a=1\Rightarrow x=6,\ y=-1$ dar y este distanţă deci nu poate fi număr negativ …………………..1p
În cazul $a=2\Rightarrow x=2,\ y=1$ ……………………………………………………………1p
şi atunci $2c+3=b+6$ ……………………………………………………………1p
$\Rightarrow b=1,\ c=2$ sau $b=c=3$ ……………………………………………………………1p
În cazul $a=3\Rightarrow x=\frac{6}{5},\ y=\frac{7}{5}$ ……………………………………………………………2p
şi $6c=5b+9$ (imposibil)……………………………………………………………1p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

a) Demonstrați că pentru un $a\in\mathbb{R}$ arbitrar ales, $\lim\limits_{x\to\infty} f(ax)=\begin{cases}0, & \text{dacă } a<0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ \infty, & \text{dacă } a>0\end{cases}$

b) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(ax)$, $a\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ încât pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ să aibă loc $f(ax)=a\cdot f(x)+b$.

Soluție:

a) Justifică $\lim\limits_{x\to\infty} e^{ax}=\begin{cases}0, & \text{dacă } a<0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ \infty, & \text{dacă } a>0\end{cases}$ 2p

b) Calculează $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{ax}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-ax}=\begin{cases}\infty, & \text{dacă } a<0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ 0, & \text{dacă } a>0\end{cases}$ 2p

c) Din $f(ax)=a\cdot f(x)+b$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{ax}=a\cdot e^x+b$

Pentru $a=1\Rightarrow b=0$ şi egalitatea se verifică 1p

Pentru $a<0$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{ax}=a\cdot\lim\limits_{x\to\infty} e^x+b\Rightarrow 0=-\infty$ (fals)....................1p

Pentru $a>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{ax}=a\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+b\Rightarrow 0=b$

Din $e^{ax}=a\cdot e^x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, pentru $x=0\Rightarrow a=1$ 1p

4. O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe aflată în studiu se modifică în timp după legea $T(t)=\sqrt{t^2+a\cdot t+b}-c\cdot t+5$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$ sunt constante ce trebuie determinate şi în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a, b, c\in\mathbb{R}$ ştiind că $T(1)=7$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)=8$.

b) Cu a, b, c astfel determinați, stabiliți dacă e posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0^0.

Soluție:

a) $T(1)=7\Rightarrow\sqrt{a+b+1}=c+2$ 1p

$\lim\limits_{t\to\infty} T(t)=8\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+a\cdot t+b}-c\cdot t\right)=3$ 1p

Este necesar ca $c>0$ 1p

Obține $c=1$, $a=6$ 2p

Din $T(1)=7\Rightarrow b=2$ 1p

b) $T(t)=0\Rightarrow\sqrt{t^2+6t+2}=t-5\Rightarrow t=\frac{23}{16}$ dar $\frac{23}{16}-5<0$, deci nu este posibil ca temperatura substanței să fie 0^0 în nici un moment al experimentului 1p