INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+e}$. Se cere:

a) Demonstraţi că $f(x)+f(1-x)=1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi primitiva F a funcţiei f care verifică $F(0)=0$.

c) Calculaţi $\int_0^1 f(x)\cdot\sin(\pi x)\,dx$

<u>Soluţie:</u>

a) Verifică $f(x)+f(1-x)=1$ 2p

b) $F(x)\in\int f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+e\right)+C$ 2p

$F(0)=0\Rightarrow C=-\dfrac{1}{2}\cdot\ln(1+e)$ 1p

c) Fie $I=\int_0^1 f(x)\cdot\sin(\pi x)\,dx$ şi $x=1-t\Rightarrow I=\int_0^1 f(1-x)\cdot\sin(\pi x)\,dx$ 1p

$\Rightarrow 2I=\int_0^1\sin(\pi x)\,dx=\dfrac{2}{\pi}$, deci $I=\dfrac{1}{\pi}$ 1p

2. Pe $G=(0;+\infty)$ se consideră legea de compoziţie notată ”$*$” şi care verifică următoarele două condiţii:

(i) $(x+1)*x=1$, $(\forall)\ x\in G$

(ii) $(x\cdot y)*z=x\cdot(y*z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z\in G$

Se cere:

a) Demonstraţi că $x*y=\dfrac{x}{y+1}$, $(\forall)\ x,\ y\in G$

b) Studiaţi dacă $(G;*)$ este structură asociativă;

c) Studiaţi dacă $(G;*)$ admite element neutru.

Soluție:

a) Alegând $y = z+1$, din (ii) $\Rightarrow \left[x\cdot(z+1)\right]*z = x\cdot\left[(z+1)*z\right]$ și cum , din (i), $(z+1)*z = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[x\cdot(z+1)\right]*z = x$. În $\left[x\cdot(z+1)\right]*z = x$ punând $x = \dfrac{t}{z+1} \Rightarrow t*z = x$,

deci $t*z = \dfrac{t}{z+1}$, $(\forall)\ t, z\in G$ ……………………………………………………………2p

b) $(1*2)*3 = \dfrac{1}{12}$ și $1*(2*3) = \dfrac{2}{3}$, deci $(G;\ *)$ nu este structură asociativă………………………3p

c) Fie $e\in G$ element neutru, atunci $1*e = e*1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e+1} = \dfrac{e}{2} = 1$ (fals), deci $(G;\ *)$ nu admite element neutru. ………………………………………………………………………………2p

3. Un mobil se deplasează pe o traiectorie după legea de mişcare $s:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ cu $s(0)=0$, în care $s(t)$ reprezintă spațiul parcurs de la momentul inițial $t_0 = 0$ pînă la momentul $t\geq 0$. Ştiind că accelerația sa la momentul $t\geq 0$ este $a(t) = t\cdot e^t$ şi viteza inițială este $v(0) = a > 0$, aflați legea de mişcare.

Notă: Este cunoscut că cele trei elemente principale ale unei mişcări, respectiv funcțiile ce descriu spațiul parcurs $s(t)$, viteza momentană $v(t)$ şi accelerația momentană $a(t)$, verifică $s'(t) = v(t)$ şi $v'(t) = a(t)$.

Soluție:

Din $v'(t) = a(t) \Rightarrow v(t)\in\int a(t)\ dt = \int t\cdot e^t dt = (t-1)\cdot e^t + C_1$ ……………………………………………2p

Din

$s'(t) = v(t) \Rightarrow s(t)\in\int v(t)\ dt = \int\left[(t-1)\cdot e^t + C_1\right]dt = (t-2)\cdot e^t + C_1\cdot t + C_2$ …………………………2p

unde C_1 şi C_2 sunt constante reale determinabile din condițiile inițiale.

$s(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 2$ ……………………………………………………………………………………..1p

$v(0) = a \Rightarrow C_1 = 1+a$ …………………………………………………………………………………… 1p

Deci $s(t) = (t-2)\cdot e^t + (1+a)\cdot t + 2$ …………………………………………………………….. 1p

4. Andrei, despre care nicicum nu se poate spune că i-ar fi dragi calculele, s-a hotărât să simplifice toată matematica prin introducerea următoarelor reguli de ”adunare” şi ”înmulțire”: *rezultatul oricărei adunări sau înmulțiri a două numere naturale este, după el, egal cu ultima cifră a rezultatului care s-ar obține după regulile obişnuite*. Astfel, *notând prin* ”$\oplus$” şi ”$\odot$” *adunarea şi înmulțirea după regulile lui Andrei*, vom avea, de pildă, $15\oplus 28 = 3$ şi $26\odot 39 = 4$. Se cere:

a) Calculați, după regula lui Andrei, $1\oplus 2\oplus 3\oplus ...\oplus 10$ şi $1\oplus 2\oplus 3\oplus ...\oplus 20$.

b) Demonstrați că $1\oplus 2\oplus 3\oplus ...\oplus 2013 = 1$.

c) Considerând $A = \{0;1;2;3;...;9\}$, demonstrați că $(A;\oplus;\odot)$ este inel comutativ.

Soluție:

a) Determină $1\oplus 2\oplus 3\oplus ...\oplus 9\oplus 10 = 5$ ………………………………..……………………. 2p
$1\oplus 2\oplus 3\oplus ...\oplus 19\oplus 20 = 0$ ……………………………………………………..………….. 2p

b) Constată că $f:\mathbb{N}^*\to\overline{0;9}$, $f(n) = 1\oplus 2\oplus 3\oplus ...\oplus n$ este periodică cu perioada principală $T = 20$…………………………………………………………………………………………….... 1p
Determină $1\oplus 2\oplus 3\oplus ...\oplus 2013 = 1$.

c) Demonstrează că $(A;\oplus;\odot)$ este structură izomorfă cu inelul $(\mathbb{Z}_{10};+;\cdot)$ sau verifică proprietățile ce definesc structura de inel comutativ …………………..2p