



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI A

1. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ încât $A^2 = a \cdot A + b \cdot I_3$

b) Demonstrați că $(I_3 + A) \left(I_3 - \frac{1}{4} \cdot A \right) = I_3$

c) Demonstrați că matricea $B = I_3 + A$ este inversabilă și calculați B^{-1} .

2. Doi prieteni, Andrei și Vasile, măsoară fiecare distanța de acasă până la școală. Distanța măsurată de Andrei este egală cu x km iar cea măsurată de Vasile este egală cu y km. Știind că există $a, b, c \in \{1; 2; 3\}$, nu neapărat distincte dar astfel încât se verifică sistemul

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ ax + y = 5 \\ cx + 3y = b + 6 \end{cases}$$

determinați a, b, c și distanțele x și y .

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

a) Demonstrați că pentru un $a \in \mathbb{R}$ arbitrar ales, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(ax) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a < 0 \\ 1, & \text{dacă } a = 0 \\ \infty, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$.

c) Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ încât pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ să aibă loc $f(ax) = a \cdot f(x) + b$.

4. O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe aflată în studiu se modifică în timp după legea $T(t) = \sqrt{t^2 + a \cdot t + b} - c \cdot t + 5$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt constante ce trebuie determinate și în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t \geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că $T(1) = 7$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 8$.

b) Cu a, b, c astfel determinați, stabiliți dacă e posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0^0 .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.