



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
9 martie 2013



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**CLASA A XII-A**

1. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e}$ . Se cere:
  - a) Demonstrați că  $f(x) + f(1-x) = 1$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ .
  - b) Determinați primitiva  $F$  a funcției  $f$  care verifică  $F(0) = 0$ .
  - c) Calculați  $\int_0^1 f(x) \cdot \sin(\pi x) dx$
2. Pe  $G = (0; +\infty)$  se consideră legea de compoziție notată "\*" și care verifică următoarele două condiții:
  - (i)  $(x+1)*x = 1$ ,  $(\forall) x \in G$
  - (ii)  $(x \cdot y)*z = x \cdot (y*z)$ ,  $(\forall) x, y, z \in G$Se cere:
  - a) Demonstrați că  $x*y = \frac{x}{y+1}$ ,  $(\forall) x, y \in G$
  - b) Studiați dacă  $(G; *)$  este structură asociativă;
  - c) Studiați dacă  $(G; *)$  admite element neutru.
3. Un mobil se deplasează pe o traiectorie după legea de mișcare  $s: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $s(0) = 0$ , în care  $s(t)$  reprezintă spațiul parcurs de la momentul inițial  $t_0 = 0$  până la momentul  $t \geq 0$ . Știind că accelerația sa la momentul  $t \geq 0$  este  $a(t) = t \cdot e^t$  și viteza inițială este  $v(0) = a > 0$ , aflați legea de mișcare.  
Notă: Este cunoscut că cele trei elemente principale ale unei mișcări, respectiv funcțiile ce descriu spațiul parcurs  $s(t)$ , viteza momentană  $v(t)$  și accelerația momentană  $a(t)$ , verifică  $s'(t) = v(t)$  și  $v'(t) = a(t)$ .
4. Andrei, despre care nicicum nu se poate spune că i-ar fi dragi calculele, s-a hotărât să simplifice toată matematica prin introducerea următoarelor reguli de "adunare" și "înmulțire": *rezultatul oricărei adunări sau înmulțiri a două numere naturale este, după el, egal cu ultima cifră a rezultatului care s-ar obține după regulile obișnuite*. Astfel, notând prin " $\oplus$ " și " $\odot$ " adunarea și înmulțirea după regulile lui Andrei, vom avea, de pildă,  $15 \oplus 28 = 3$  și  $26 \odot 39 = 4$ . Se cere:
  - a) Calculați, după regula lui Andrei,  $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus 10$  și  $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus 20$ .
  - b) Demonstrați că  $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus 2013 = 1$ .
  - c) Considerând  $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$ , demonstrați că  $(A; \oplus; \odot)$  este inel comutativ.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.