



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

- Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - Arătați că C este inversabilă, după care calculați C^{-1} și verificați egalitatea $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$;
 - Demonstrați că $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;
 - Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.
- Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq -2$. Determinați a și b încât $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$.
- Fie $a > 0$, $b \in (0; 1)$ și funcția $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{pentru } x \in [0; b] \\ a \cdot x^4, & \text{pentru } x \in (b; 1] \end{cases}$
 - Arătați că f are limită în $x = b$ dacă și numai dacă $a \cdot b = 1$;
 - Calculați $L_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ și $L_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$.
- Fie $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătrate de ordin doi și cu elemente numere reale. Arătați că:
 - $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$, oricare ar fi $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$;
 - Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ atunci sau $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ sau $\det(A - B) \geq \det A + \det B$;
 - Andrei vrea să arate că la orice alegere de trei matrici $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ poate alege semne + sau - astfel încât $\det(A \pm B \pm C) \geq \det A + \det B + \det C$. Aflați dacă acest lucru este posibil.
Dacă da, considerând $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, aflați cum trebuie să aleagă Andrei semnele + și -.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.