INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

x

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+mx+m^2,\ m\in\mathbb{R}$, fixat.

a) Demonstrați că $f(x)\ge\dfrac{3m^2}{4},\ (\forall)x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care vârful corespunzător parabolei asociate acestei funcții are coordonate egale.

<u>Soluție:</u>

a) $f(x)\ge\dfrac{3m^2}{4}\Leftrightarrow x^2+mx+\dfrac{m^2}{4}\ge 0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2\ge 0$, adevărat $(\forall)x\in\mathbb{R}$. 3p

b) Vârful parabolei asociate este $V\left(-\dfrac{m}{2},\dfrac{3m^2}{4}\right)$ 2p

Din $-\dfrac{m}{2}=\dfrac{3m^2}{4}\Rightarrow\begin{cases}m_1=0\\ m_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 2p

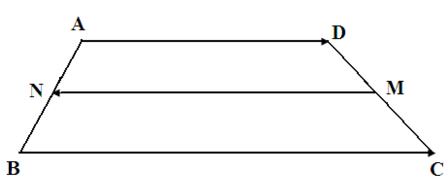
2. În trapezul $ABCD\ (AD\parallel BC)$, fie M mijlocul segmentului $[CD]$ şi N mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

b) Deduceți că $(MN)\parallel(BC)$.

c) Demonstrați că $MN=\dfrac{1}{2}\cdot(AD+BC)$.

<u>Soluție:</u>



a) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ 1p

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}=-\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ 1p

Adunând, membru cu membru, egalitățile de mai sus obținem: $2\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}\Rightarrow$ $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$ 2p

b) $AD \parallel BC \Rightarrow (\exists) t > 0$ astfel încât $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ 1p

$\overrightarrow{MN} = -\dfrac{t+1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$, paraleli $\Rightarrow (MN) \parallel (BC)$ 1p

c) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|-\dfrac{t+1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{t+1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{t \cdot BC + BC}{2} = \dfrac{AD + BC}{2}$ 1p

3. Un turist se deplasează pe un aeroport utilizând o bandă rulantă de 300 metri lungime care are viteza de mişcare 4 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Notăm cu *A*, respectiv *B* extremităţile benzii rulante. (*A*, extremitatea iniţială şi *B* extremitate finală). Turistul vrea să stabilească următoarea performanţă: să parcurgă traseul de la *A* la *B* şi înapoi la *B*, fără oprire, cu o viteză constantă. Ştiind că acest drum este parcurs în 10 minute şi 48 de secunde, să se determine viteza turistului.

<u>Soluţie:</u>

Fie *v*, viteza în $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ a turistului.

Lungimea benzii este de $L = 0{,}3$ km.

De la *A* la *B*, turistul are viteza $v_A = v + 4$ 1p

Timpul necesar parcurgerii distanţei [*AB*] este $t_1 = \dfrac{0,3}{v+4}$ 1p

De la *B* la *A*, turistul are viteza $v_B = v - 4$ 1p

Timpul necesar parcurgerii distanţei [*BA*] este $t_2 = \dfrac{0,3}{v-4}$ 1p

Timpul total necesar parcurgerii distanţei $A \to B \to A$ este t = 10 minute şi 48 secunde =

$= \dfrac{10}{60}$ ore $+ \dfrac{48}{3600}$ ore $= 0{,}18\text{h}$ 1p

$t_1 + t_2 = 0{,}18 \Rightarrow \dfrac{0,3}{v+4} + \dfrac{0,3}{v-4} = 0{,}18 \Rightarrow 3v^2 - 10v - 48 = 0 \Rightarrow v_1 = -\dfrac{8}{3}$ (nu convine) ;

$v_2 = 6\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ (viteza turistului) 2p

4. O firmă doreşte să-şi dubleze în doi ani producţia pentru un anumit produs. Cu câte procente trebuie să crească producţia în fiecare an pentru a atinge acest obiectiv ? $\left(\sqrt{2} \simeq 1{,}4142\right)$.

<u>Soluţie:</u>

Fie *P*, producţia anuală obţinută de firmă până în momentul primei creşteri de *t*% 1p

La sfârşitul primului an producţia obţinută este $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \cdot P$ 1p

La sfârşitul anului al doilea producţia obţinută este $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 \cdot P$ 1p

Din enunţ rezultă că $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 \cdot P = 2P$ 1p

$\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 = 2 \Rightarrow 1 + \dfrac{t}{100} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow t = 100 \cdot \left(-1 \pm \sqrt{2}\right) \Rightarrow t_1 = -241{,}42$ (nu convine),

$t_2 = 41{,}42$ (soluţie) 2p

Aşadar în fiecare an producţia trebuie să crească cu 41,42% 1p