CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

Subiectul 1.

Se dau numerele reale x, y astfel încat $0 < x + y < xy$. Notăm S = x + y şi P = xy.

a) Arătați că $S^2 \geq 4P, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Arătați că $S > 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție:

a) $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 (A)$ …………..4p

b) $P > S / \cdot S \Leftrightarrow PS > S^2 \overset{a)}{\geq} 4P \Leftrightarrow PS > 4P / : P \Leftrightarrow S > 4$ ……………………………………………..…………3p

Subiectul 2.

Rezolvați ecuația: $\left(\log_x 4\right)^2 + \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{4}\right) - \log_2 x + \frac{3}{4} = 0$.

Soluție:

Notăm $\log_4 x = t$ şi avem: $\log_x 4 = \frac{1}{t}$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{x} = t$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{t}$ şi $\log_2 x = 2t$ 2p

Obținem $\frac{1}{t^2} + t^2 - \frac{2}{t} - 2t + \frac{3}{4} = 0$ sau, cu notația $t + \frac{1}{t} = y$, $y^2 - 2y - \frac{5}{4} = 0$ 2p

$y_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2t^2 + t + 2 = 0$, ecuație cu $\Delta < 0$ …..…………………………………………………...…1p

$y_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$ …………………………………………………………………1p

În final se obțin: $x_1 = 16, x_2 = 2$ ……………………………………………………………………………1p

Subiectul 3.

În ΔABC se ştie că A(-6; 3), ecuația medianei din B este y + 2x = 0 şi ecuația înălțimii din C este x – y = 0.

a) Demonstrați că B(b; -2b) şi C(c; c);

b) Aflați numerele reale b şi c.

Soluție:

a)Demonstrează că B(b, -2b) şi C(c, c)..2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera teoretică, profil umanist

b)Mijlocul lui [AC] este de coordonate $\left(\frac{c-6}{2},\frac{c+3}{2}\right)$ şi se află pe dreapta y + 2x = 0……………………1p

$\frac{c+3}{2}+2\frac{c-6}{2}=0 \Leftrightarrow c=3 \Rightarrow C(3,3)$ ……………………………………………………………........2p

Înălțimea din C este perpendiculară pe AB, deci panta dreptei AB este -1…………………..…………1p

Deci

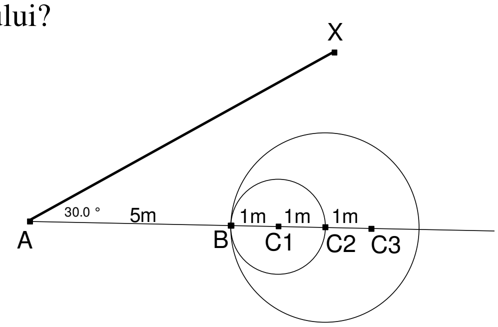
$\frac{-2b-3}{b+6}=-1 \Leftrightarrow b=3 \Rightarrow B(3,-6)$ ……………………………………………………………………...1p

Subiectul 4

Figura alăturată modelează zborul unei muşte în apropierea unei clădiri a cărei perete este reprezentat de dreapta AX . Musca porneşte din B şi descrie cercul de centru C_1 în sensul acelor de ceas. Apoi din B descrie cercul de centru C_2 în acelaşi sens, apoi cercul de centru C_3 , C_4 ,…., C_n , toate aceste centre fiind coliniare şi situate la $1m$ unu după celălalt . Musca se opreşte din zbor în clipa în care atinge peretele. Ştiind că $m(\sphericalangle XAB)=30^\circ$ aflați:

a) Care este centrul cercului pe care se situează musca în clipa în care se opreşte din zbor?

b) Care a fost lungimea zborului?



Monea Mihai şi Steluța – Deva

Soluție:

a) Zborul se opreşte când traiectoria coincide cu cercul tangent lui AX . Dacă C_n este centrul acestui cerc atunci $d(C_n, AB)$ este raza acestui cerc şi egală cu $AC_n/2$ datorită unghiului de 30 grade. Dar $AC_n=5+n$. Dar raza este egală şi cu BC_n, adică cu n.Obținem ecuația $\frac{5+n}{2}=n$, de unde $n=5$, centrul este C_5 ………………………………………………………..……………………………………4p

b) Musca parcurge complet primele 4 cercuri şi 1/6 din al cincilea cerc,

adică $2\pi+4\pi+6\pi+8\pi+\frac{10\pi}{6}=\frac{65\pi}{3}$ ……………………..……………………………………………3p