CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}, x\in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că $A(x)\cdot A(y)=A(x\cdot y), \forall x, y\in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că $A^n(x)=A(x^n), \forall x\in \mathbf{R}$ şi $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

c) Să se determine $x\in \mathbf{R}$ pentru care $A^{2011}(x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție:

a) Demonstrează relația $A(x)\cdot A(y)=A(x\cdot y), \forall x, y\in \mathbf{R}$ **3p**

b) Demonstrează relația $A^n(x)=A(x^n), \forall x\in \mathbf{R}$ şi $\forall n\in \mathbf{N}^*$ **2p**

c) $A^{2011}(x)=I_2 \overset{b)}{\Leftrightarrow} A(x^{2011})=I_2 \Leftrightarrow x^{2011}=1$ **1p**

Obține $x=1$ **1p**

2. Pe mulțimea **R** se consideră legea de compoziție $x\circ y = xy-2(x+y)+6$.

a) Să se verifice că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2, \forall x, y\in \mathbf{R}$.

b) Aflați $a\in \mathbf{R}$ astfel încât $x\circ a=a, \forall x\in \mathbf{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziție "$\circ$" este asociativă, să se calculeze expresia:
$E=(-2011)\circ(-2010)\circ...\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ...\circ 2010\circ 2011$.

Soluție:

a) Demonstrează relația **2p**

b) $x\circ a=a, \forall x\in \mathbf{R} \Leftrightarrow (x-3)(a-2)=0, \forall x\in \mathbf{R} \Leftrightarrow a=2$ **2p**

c) Observă că $x\circ 2=2\circ x=2, \forall x\in \mathbf{R}$ **1p**

Notează $(-2011)\circ(-2010)\circ...\circ(-1)\circ 0\circ 1=x$ şi $3\circ...\circ 2010\circ 2011=y$

$E=x\circ 2\circ y=(x\circ 2)\circ y=2\circ y=2$ **2p**

3. Contabilul unei firme de dulciuri compară vânzările de iepuraşi şi ouă de ciocolată din luna aprilie a anului 2011 şi observă că numărul de ouă de ciocolată este triplu față de numărul de iepuraşi de ciocolată vânduți. Mai observă că numărul ce reprezintă iepuraşii vânduți începe cu 1 şi că mutând această cifră la sfârşitul numărului obține numărul ce reprezintă ouăle de ciocolată vândute. Ştiind că numărul iepuraşilor vânduți este cel mai mic număr cu această proprietate aflați câți iepuraşi si câte ouă de ciocolată s-au vândut.

Soluție:

Notează $\overline{1a_1a_2...a_n}=$ nr. de iepuraşi vânduți şi $\overline{a_1a_2...a_n1}=$ nr. de ouă vândute **1p**

$\overline{a_1a_2...a_n1}=3\cdot\overline{1a_1a_2...a_n} \Rightarrow a_n=7$ **1p**

$\overline{a_1a_2...a_{n-1}71}=3\cdot\overline{1a_1a_2...a_{n-1}7} \Leftrightarrow \overline{a_1a_2...a_{n-1}}\cdot 100+71=(1\cdot 10^n+\overline{a_1a_2...a_{n-1}}\cdot 10+7)\cdot 3$ **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

Notează $\overline{a_1a_2...a_{n-1}} = \text{x} \Rightarrow 100\text{x} + 71 = 3\cdot 10^n + 30\text{x} + 21 \Leftrightarrow 7\text{x} + 5 = 3\cdot 10^{n-1}$ …………….............… **1p**

Verifică faptul că $n \notin \{1, 2, 3, 4\}$ ……………………………………………………….........……. **1p**

Obține $n = 5 \Rightarrow \text{x} = 4285$ ……………………………………………………….............… **1p**

Obține că nr. de iepurași vânduți = 142857 și nr. de ouă vândute = 428571 .... **1p**

4. Cristina a măsurat temperatura minimă din orașul Iași, în fiecare zi din lunile decembrie 2010 și ianuarie 2011. Fie $t_1, t_2, ..., t_{62}$ temperaturile măsurate, în această ordine, începând cu 1 decembrie și până pe 31 ianuarie.

Exceptând temperaturile din 1 decembrie și 31 ianuarie, la finalul măsurătorilor făcute, Cristina constată faptul că temperatura minimă a fiecărei zile este egală cu suma temperaturilor minime ale zilelor de dinaintea și de după ziua în care face măsurătoarea.

Pe 3 decembrie 2010 și pe 31 ianuarie 2011, temperatura minimă măsurată a fost de -5° C ($t_3 = t_{62} = -5^\circ$C) . Demonstrați că:

a) $t_i = -t_{i+3}, \forall i = \overline{1, 59}$;

b) $t_i = t_{i+6}, \forall i = \overline{1, 56}$;

c) Determinați temperatura minimă din prima zi de Crăciun (25 decembrie).

<u>Soluție:</u>

a) $t_{i+1} = t_i + t_{i+2}, \forall i = \overline{1, 60}$ ……………………………………………………….........…… **1p**

$t_{i+2} = t_{i+1} + t_{i+3}, \forall i = \overline{0, 59}$ ……………………………………………………….................. **1p**

Deduce $t_{i+1} = t_i + t_{i+1} + t_{i+3} \Rightarrow t_i = -t_{i+3} \forall i = \overline{1, 59}$ ……………………………………..................….. **1p**

b) În egalitatea dedusă la a) punem $i \to i+3$ și obținem $t_{i+3} = -t_{i+6}, \forall i = \overline{0, 56}$.

Din a) și egalitatea de mai sus rezultă $t_i = t_{i+6}, \forall i = \overline{1, 56}$ ……………………………..................... **1p**

c) $t_{24} = t_{18} = t_{12} = t_6 = -t_3 = 5^\circ$C ………………………………………………………............... **1p**

$t_{26} = t_{32} = t_{38} = t_{44} = t_{50} = t_{56} = t_{62} = -5^\circ$C …………………………………………..................… **1p**

Temperatura minimă din prima zi de Crăciun este $t_{25} = t_{24} + t_{26} = 0^\circ$C ………...……................... **1p**