

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XII A

1. În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că $A(x) \cdot A(y) = A(x \cdot y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că $A^n(x) = A(x^n), \forall x \in \mathbf{R}$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

c) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $A^{2011}(x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea \mathbf{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) Aflați $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \circ a = a, \forall x \in \mathbf{R}$.

c) Știind că legea de compoziție " \circ " este asociativă, să se calculeze expresia:

$$E = (-2011) \circ (-2010) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2010 \circ 2011.$$

3. Contabilul unei firme de dulciuri compară vânzările de iepurași și ouă de ciocolată din luna aprilie a anului 2011 și observă că numărul de ouă de ciocolată este triplu față de numărul de iepurași de ciocolată vânduți. Mai observă că numărul ce reprezintă iepurașii vânduți începe cu 1 și că mutând această cifră la sfârșitul numărului obține numărul ce reprezintă ouăle de ciocolată vândute. Știind că numărul iepurașilor vânduți este cel mai mic număr cu această proprietate aflați câți iepurași și câte ouă de ciocolată s-au vândut.

4. Cristina a măsurat temperatura minimă din orașul Iași, în fiecare zi din lunile decembrie 2010 și ianuarie 2011. Fie t_1, t_2, \dots, t_{62} temperaturile măsurate, în această ordine, începând cu 1 decembrie și până pe 31 ianuarie.

Exceptând temperaturile din 1 decembrie și 31 ianuarie, la finalul măsurătorilor făcute, Cristina constată faptul că temperatura minimă a fiecărei zile este egală cu suma temperaturilor minime ale zilelor de dinaintea și de după ziua în care face măsurătoarea.

Pe 3 decembrie 2010 și pe 31 ianuarie 2011, temperatura minimă măsurată a fost de -5°C ($t_3 = t_{62} = -5^\circ \text{C}$). Demonstrați că:

a) $t_i = -t_{i+3}, \forall i = \overline{1, 59}$;

b) $t_i = t_{i+6}, \forall i = \overline{1, 56}$;

c) Determinați temperatura minimă din prima zi de Crăciun (25 decembrie).

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.