CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a X-a

1. O întreprindere este construită astfel încât suma distanţelor la cei patru furnizori de materii prime să fie minimă. Raportându-ne la un sistem de axe ortogonale, cu unitatea de 1km, locaţiile furnizorilor au următoarele coordonate: $O(0,0)$, $B(8,20)$, $C(36,27)$, $D(56,0)$.
Determinaţi coordonatele punctului A unde se află întreprinderea.

<u>Soluţie:</u>
În ΔAOC: $AO + AC \geq OC$; $AO + AC$ este minim $\Leftrightarrow AO + AC = OC \Leftrightarrow A \in OC$ 1p
În ΔABD: $AB + AD \geq BD$; $AB + AD$ este minim $\Leftrightarrow AB + AD = BD \Leftrightarrow A \in BD$ 1p
$AO + AB + AC + AD$ este minimă $\Leftrightarrow$ A este intersecţia dreptelor OC şi BD 1p
Ecuaţia dreptei OC: $3x - 4y = 0$ 1p
Ecuaţia dreptei BD : $5x + 12y = 280$ 1p
Coordonatele punctului A se obţin prin rezolvarea sistemului format din ecuaţiile dreptelor OC şi BD 1p
Se găseşte A (20, 15) 1p

2. Sistemul de scriere Braille, utilizat de către orbi, constă din caractere cuprinzând fiecare între 1 şi 6 puncte în relief (punctele înnegrite), dispuse astfel (ex. litera A): • ◦ .
◦ ◦
◦ ◦

a) Câte caractere are sistemul?
b) Câte combinaţii pot fi formate din exact trei puncte în relief?

<u>Soluţie:</u>
a) Numărul de submulţimi al unei mulţimi cu 6 elemente este $2^6 = 64$ 2p
Trebuie să fie cel puţin un punct în relief: $64 - 1 = 63$ 2p
b)Numărul combinaţiilor de trei puncte în relief din 6 este C_6^3 .... 2p
Calculează $C_6^3 = 20$ 1p

3. a) Să se rezolve: $5^x + 12^x \leq 13^x$.
b) Demonstraţi că 2^{2012} are cel puţin 604 cifre.

<u>Soluţie:</u>
a) $5^2 + 12^2 = 13^2$ 1p
inecuaţia este echivalentă cu $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x \leq 1$; dar $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$ 1p
Funcţiile $\left(\frac{5}{13}\right)^x, \left(\frac{12}{13}\right)^x$ sunt strict descrescătoare şi suma lor este funcţie strict descrescătoare 1p
Obţine $x \in [2, \infty)$ 1p
b) $2^{2012} = 2^{2010} \cdot 4 = \left(2^{10}\right)^{201} \cdot 4 = 1024^{201} \cdot 4$ 2p
$\Rightarrow 2^{2012} > 1000^{201} = 10^{603}$ care are 604 cifre 1p

4. Magnitudinea aparentă a unui astru de luminozitate L este definită în raport cu o luminozitate de referinţă L_0 prin $M = \lg\frac{L}{L_0}$ prin convenţia: magnitudinea creşte de 5 ori când luminozitatea se micşorează de 100 ori. Determinaţi partea întreagă a magnitudinii aparente a următoarelor corpuri cereşti: Sirius ($L = 3{,}87L_0$), Venus ($L=43{,}65L_0$), Luna ($L = 1{,}2\cdot 10^5$), Soare ($L = 4{,}786\cdot 10^{10}$).

Soluţie:

$M_1 = \lg 3{,}87; M_2 = \lg 43{,}65;$ 1p

$M_3 = \lg 1{,}2\cdot 10^5; M_4 = \lg 4{,}786\cdot 10^{10}$ 1p

$10^0 < 3{,}87 < 10^1 \Rightarrow \lg 3{,}87 \in (0;1) \Rightarrow [\lg 3{,}87] = 0$ 1p

analog $[\lg 43{,}65] = 1$ 1p

$\lg 1{,}2\cdot 10^5 = \lg 1{,}2 + 5$ şi $\lg 4{,}786\cdot 10^{10} = \lg 4{,}786 + 10$ 2p

$[\lg 4{,}786] = 5$ şi $\left[\lg 4{,}786\cdot 10^{10}\right] = 10$ 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.