

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a XII-a

1. Un lot de jucători al unei echipe de fotbal are 2 portari, 8 jucători pentru apărare și 9 jucători de atac. În câte moduri se poate forma echipa de start cu 11 jucători selectați din lotul existent, dacă aceasta trebuie să fie compusă din: 1 portar, 4 jucători de apărare și 5 jucători de atac?
2. Americanul John a moștenit 25000 de dolari. O parte din acești bani i-a depus într-o bancă, o parte i-a investit în obligațiuni municipale și o parte într-un fond mutual. După un an el a primit o dobândă totală de 1620 de dolari. Știind că banca i-a plătit o dobândă de 6% anual, obligațiunile o dobândă de 7% anual, fondul mutual 8% anual și că John a investit mai mult cu 6000 de dolari în obligațiuni municipale decât în fondul mutual, precizați ce sume a investit John în fiecare categorie.
3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Să se calculeze A^4 .
 - b) Dacă matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relațiile $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ și $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, să se demonstreze că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
 - c) Să se demonstreze că: dacă oricare ar fi $x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^n \cdot x = x \cdot A^n$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 4k$.
4. Pe mulțimea \mathbb{Z} definim legea de compoziție $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$.
 - a) Să se demonstreze că legea “*” este asociativă.
 - b) Să se determine elemente simetrizabile ale mulțimii \mathbb{Z} în raport cu legea “*”.
 - c) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } 2012 \text{ ori}} = -1$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.