INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

CLASA A IX-A

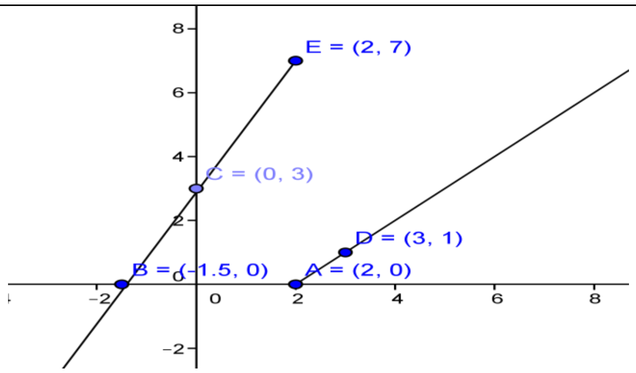
1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x-2, & \text{dacă } x\geq 2 \\ 2x+3, & \text{dacă } x<2 \end{cases}$.

a) Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate și să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele de intersecție al graficului cu axele de coordonate ale sistemului de axe de coordonate cartezian xOy.

c) Să se calculeze: $E=(f(2)+f(3)+...+f(n)):(f(-1)+f(-2)+...+f(-n))$.

Soluție

a)	$G_f\cap(Ox)$: $\begin{cases} x-2=0\Rightarrow x=2, A(2,0) \\ 2x+3=0\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}, B(-\dfrac{3}{2},0) \end{cases}$ $G_f\cap(Ox)$: $f(0)=3\Rightarrow C(0,3)$	1p 1p
		2p
b)	$A_{\Delta ABC}=\dfrac{BA*OC}{2}=\dfrac{21}{4}$	1p
c)	$f(2)+f(3)+...+f(n)=\dfrac{n^2-3n+2}{2}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ $f(-1)+f(-2)+...+f(-n)=-n^2+2n=-n(n-2)$ $E=(f(2)+f(3)+...+f(n)):(f(-1)+f(-2)+...+f(-n))=\dfrac{1-n}{2n}$	2p

2. Să se rezolve triunghiul ABC știind că măsurile unghiurilor sunt în progresie aritmetică și $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$, iar latura cea mai lungă este de 6 cm.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

	Soluție Notăm cu α măsura unghiului B. Atunci $\alpha - r, \alpha, \alpha + r$ sunt măsurile celor trei unghiuri.	1p
	$\alpha - r + \alpha + \alpha + r = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ $m(\sphericalangle \text{B}) = 60^\circ$	1p
	Din egalitatea dată avem: $\sin(60^\circ + r) + \sin(60^\circ - r) = \frac{3}{2}$ $2\sin 60^\circ \cos r = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 30^\circ$	2p
	Unghiurile triunghiului *ABC* sunt: $m(\sphericalangle \text{A}) = 30^\circ, m(\sphericalangle B) = 60^\circ, m(\sphericalangle C) = 90^\circ$.	1p
	Asadar triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza AB= 6 cm $\Rightarrow BC = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm	1p
	Din teorema lui Pitagora $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm	1p

3. Fie cercul $\mathcal{C}(O,1)$ de centru O și rază R=1 și punctul $A(1,0) \in \mathcal{C}(O,1)$. Un punct M de pe cercul $\mathcal{C}$ are o mișcare uniformă în sens direct trigonometric. Spunem că mișcarea este uniformă dacă în intervale de timp egale, punctul parcurge arce de cerc de lungimi egale. La momentul inițial t=0, punctul M coincide cu punctul A. În timp de o secundă, punctul M parcurge pe cerc un arc AM astfel încât $m(\sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})) = \frac{\pi}{9}$.

a)După cât timp, de la punerea în mișcare, punctul M trece prima dată prin punctul A?

b)Indicați pe un desen care va fi poziția punctului M după 90 de secunde. Dar după 3 minute?

c)Fie $B' \in \mathcal{C}(O,1)$, astfel încât $m(\sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}'))= \frac{3\pi}{2}$. Indicați după cât timp punctul M trece prima dată prin punctul B. În ce alte momente t punctul M trece din nou prin punctul B.

a)	*Soluție* Într-o secundă se parcurge măsura arcului $m(AM) = \frac{\pi}{9}$ radiani	1p
	1sec.................. $\frac{\pi}{9}$; x sec.................. 2π ; $x = \frac{2\pi}{\pi} \cdot 9 = 18$ sec	1p
	M trece prima dată prin A după 18 secunde	1p
	M trece a doua oară prin A după 36 de secunde	1p

b)	În 90 de secunde punctul M parcurge de 5 ori cercul. Prin urmare, după 90 de secunde se găseşte din nou în punctul A. După 3 minute, punctul M se găseşte tot în A.	1p
c)	1sec.................. $\frac{\pi}{9}$; **x** sec................. $\frac{3\pi}{2}$; $x=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{9}{\pi}=\frac{27}{2}$ secunde	1p
	Celelalte momente sunt de forma $\frac{27}{2}+k\cdot 18$	1p

4. Doi fizicieni testează o miniracheta, lansând-o de la sol. Se notează înălţimea cu $h(t)$ (în metri) şi timpul cu t (în secunde). Fizicienii estimează că înălţimea pe care o va atinge miniracheta, în funcţie de timp, este dată de relaţia $h(t)=-5t^2+100t$.

a) La cât timp de la lansare miniracheta ajunge din nou la sol?

b) Demonstraţi că funcţia h este crescătoare pe intervalul $[0,10]$ şi descrescătoare pe intervalul $[10,20]$.

c) Care este înălţimea maximă pe care o poate atinge miniracheta?

a)	Soluţie Nivelul solului se consideră a fi identificat cu axa absciselor(din planul de lansare a minirachetei).	1p
	În aceste condiţii miniracheta atinge solul atunci când $h(t)=0$. Din $-5t^2+100t=0\Rightarrow t_1=0, t_2=20$; $t_1=0$ s reprezintă momentul lansării $t_2=20$ s reprezintă momentul în care ajunge din nou la sol	2p
b)	$h(\text{t})=-5t^2+100t$ este definită pe [0,20], deoarece pe acest interval functia h este pozitivă.	1p
	Punctul de maxim al acesteia se găseşte în $\frac{-b}{2a}$, adică $t_v=\frac{100}{10}=10$. Atunci *h(t)* este crescătoare pe intervalul [0,10] şi descrescătoare pe [10,20].	2p
c)	Cea mai mare înălţime pe care o poate atinge miniracheta este dată de valoarea maximă a funcţiei *h(t)*. Aceasta este $h(10)=500$ m. Deci, cea mai mare înălţime pe care o poate atinge miniracheta este 500 de metri.	1p

CLASA A X-A