EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….008**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex i^{2007}.

(4p) **b)** Să se determine inversul numărului complex i^{2007}.

(4p) **c)** Să se determine semnul numărului $\sin\frac{\pi}{2007}-\cos\frac{\pi}{2007}$.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului ABC, dacă $AB=6$, $BC=10$ şi măsura unghiului B este de 45°.

(2p) **e)** Să se determine ecuația cercului cu centrul în punctul $M(1,-1)$ şi raza 2.

(2p) **f)** Să se determine distanța de la punctul $A(1,1,-1)$ la planul de ecuație $3x+2y-z=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine coordonatele vârfului parabolei de ecuație $y=x^2-2x+5$.

(3p) **b)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii A dacă aceasta are exact 8 submulțimi.

(3p) **c)** Să se determine numărul real x dacă numerele 2; x şi $x+4$ (în această ordine) sunt în progresie aritmetică.

(3p) **d)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f=2X^3-6X^2+8X+1$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\hat{4}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_5$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^2 f^3(x)dx$

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = 10X^{10} + 9X^9 + ... + 2X^2 + X + 0,5$ cu rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_{10} \in \mathbf{C}$ şi $g = (X-1)\cdot f$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{10}$ şi $x_1 + x_2 + ... + x_{10}$.

(4p) **c)** Să se verifice că $g = 10X^{11} - X^{10} - ... - X^2 - 0,5X - 0,5$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $z \in \mathbf{C}$ şi $g(z) = 0$, atunci $10 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}}$.

(2p) **e)** Să se arate că $|u+v| \le |u| + |v|$, $\forall u, v \in \mathbf{C}$.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $z \in \mathbf{C}$, $|z| > 1$, atunci $10 \ne \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}}$.

(2p) **g)** Să se arate că $|x_k| \le 1$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., 10\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x - \frac{x}{x+1}$.

Pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixat şi pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, notăm $x_n(a) = \underbrace{(\sin \circ \sin \circ ... \circ \sin)}_{de\ n\ ori\ \sin}(a)$.

(4p) **a)** Să se calculeze derivatele $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $x \ge 0$.

(4p) **b)** Să se arate că $f^{(3)}(x) < 0$, $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $x_n(a) \ge \frac{a}{na+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $ln(x+1) - ln\, x < \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

(2p) **f)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(x_1(a) + x_2(a) + ... + x_n(a)\right)$.