EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….010**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $2\vec{i}+5\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(6,7)$ și $C(7,6)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$.

(4p) **d)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(6,7)$ și $C(7,6)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(6,7)$, $B(5,5)$ și $C(7,6)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{3+i}{4-i}=a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze elementul $\hat{6}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_7$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $C_9^4-C_9^5$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^4-3x^2+2=0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+8^x=10$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n>n^3$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+x+1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+7}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbf{R})$, $B = A^T \cdot A$, $C = A \cdot A^T$, astfel încât $\operatorname{rang}(A) = 2$ şi vectorii $\overrightarrow{v_k} = a_k \vec{i} + b_k \vec{j}$, $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4\}$

(A^T este transpusa matricei A).

Se admite cunoscut că $\operatorname{rang}(X \cdot Y) \le \min(\operatorname{rang}(X), \operatorname{rang}(Y))$, $\forall\, X \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $\forall\, Y \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, $m, n, p \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se arate că există $n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$, astfel încât $\det\begin{pmatrix} a_n & a_r \\ b_n & b_r \end{pmatrix} \neq 0$.

(4p) **b)** Să se arate că elementele matricei B sunt $b_{nr} = \overrightarrow{v_n} \cdot \overrightarrow{v_r}$, cu $n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(4p) **c)** Să se arate că $\operatorname{rang}(B) \le 2$.

(2p) **d)** Să se arate că $\det(B) = 0$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă cei 4 vectori sunt nenuli şi distincți, atunci există 2 dintre ei $\overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{v_r}$, cu $n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$, care fac între ei un unghi de cel mult 90°.

(2p) **f)** Să se arate că matricea B conține cel puțin 6 elemente nenegative.

(2p) **g)** Să se arate că

$$\det C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}^2.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_a : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f_a(x) = (x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ şi şirul $(e_n(a))_{n\ge1}$, $e_n(a) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+a}$, unde $a \in [0,1]$, $n \ge 1$.

(4p) **a)** Să se arate că $f_a'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+a}{x(x+1)}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f_a''(x) = \frac{(2a-1)x+a}{x^2(x+1)^2}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(a)$.

(2p) **d)** Să se arate că şirul $(e_n(0))_{n\ge1}$ este strict crescător.

(2p) **e)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_a.

(2p) **f)** Să se arate că şirurile $\left(e_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n\ge1}$ şi $(e_n(1))_{n\ge1}$ sunt strict descrescătoare.

(2p) **g)** Să se determine cel mai mic număr $a \in [0,1]$ pentru care $(e_n(a))_{n\ge1}$ este şir descrescător.