Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….012**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{4+5i}{5+4i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(2,3)$ la dreapta $x+y+5=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2=3x$ dusă prin punctul $P(3,3)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2,2)$, $M(2,3,2)$ și $N(3,4,2)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$, $C(2,1,3)$ și $D(-1,-2,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2-3i)^3=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se demonstreze că $n!\cdot n=(n+1)!-n!,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(3p) **b)** Să se arate că $1!\cdot 1+2!\cdot 2+...+100!\cdot 100=101!-1$.

(3p) **c)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z_6}$ să verifice relația $\hat{x}^3=\hat{x}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^x=6$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor complexe ale polinomului $f=X^4-X^2-24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x+5^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se determine asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze matricele $C + D$ şi $(C + D)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei C .

(4p) **c)** Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$, $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $x, y, a, b \in \mathbf{R}$ şi $x + y = 2(a + b)$, atunci $x \le a + b$ sau $y \le a + b$.

(2p) **e)** Să se arate că $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$, avem $\det(A + B) \le \det(A) + \det(B)$ sau $\det(A - B) \le \det(A) + \det(B)$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in M_2(\mathbf{R})$, există o alegere a semnelor + sau – astfel încât $\det(A_1 \pm A_2 \pm ... \pm A_n) \le \det(A_1) + \det(A_2) + ... + \det(A_n)$.

(2p) **g)** Să se arate că există o alegere a semnelor + sau – astfel încât să avem

$$(\cos 1 \pm \cos 2 \pm ... \pm \cos 10)^2 + (\sin 1 \pm \sin 2 \pm ... \pm \sin 10)^2 \le 10$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}$ şi şirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ şi $(c_n)_{n\ge1}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}, \quad b_n = a_n - f(n), \quad c_n = a_n - f(n+1), \ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(2p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall k > 0$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[4]{c}}.$$

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{1}{\sqrt[4]{k+1}} < \frac{4}{3}(k+1)^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}k^{\frac{3}{4}} < \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$, $\forall k \in (0, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător iar şirul $(c_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

(2p) **f)** Să se arate că şirurile $(b_n)_{n\ge1}$ şi $(c_n)_{n\ge1}$ sunt convergente .

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) **h)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[4]{2n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$