EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….013**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $4-6i$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3,-2)$ și $C(4,-3)$.

(4p) **c)** Să se calculeze suma de numere complexe $S=i+i^3+i^5+i^7$.

(4p) **d)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3,-2)$ și $C(4,-3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3,-2)$, $B(2,2)$ și $C(4,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{5+8i}{8-5i}=a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze elementul $\hat{2}^{2006}$ în $(\mathrm{Z}_8,\cdot)$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $E=C_8^3-C_8^5+C_8^8$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x=1$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x-32=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ să verifice relația $3^n<19$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+2x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n+3}{5\ln n-2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră şirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, cu $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2-2$ şi pentru $\forall\, n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, $f_n(x)=x\cdot f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$. Se consideră cunoscute formulele $2\cos a\cdot\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$, $\forall\, a,b\in\mathbf{R}$ şi $\cos 2x=2\cos^2 x-1, \forall\, x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_2(1)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_3(x)$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $f_2(2\cos t)=2\cos 2t$, pentru $\forall t\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(2\cos x)=2\cos nx$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, f_n este o funcție polinomială de gradul n cu coeficienți întregi.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, coeficientul dominant al funcției f_n este egal cu 1, iar termenul liber aparține mulțimii $\{-2, 0, 2\}$

(2p) **g)** Dacă pentru $r\in\mathbf{Q}$, $\cos r\pi\in\mathbf{Q}$, să se demonstreze că $\cos r\pi\in\left\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\ ,\ \ y_n=x_n-2\sqrt{n},\ \ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(4p) **a)** Să se arate că $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}, \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Să se deducă inegalitatea $2\sqrt{n+1}-2<x_n<2\sqrt{n}-1$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$.

(4p) **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}$

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

(2p) **f)** Să se arate că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

(2p) **g)** Să se arate că $-2\leq\lim\limits_{n\to\infty}y_n<-1$.