EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….014**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$.

(4p) **b)** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\frac{1}{1+i}$.

(4p) **c)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(1,1)$ şi $B(-1,1)$ să aparțină dreptei $y=ax+b$.

(4p) **d)** Să se calculeze lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC având laturile $AB=6$, $BC=10$, $AC=8$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=4$ în punctul $A(0,2)$.

(2p) **f)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ ştiind că punctele $A(2,2,a)$, $B(1,0,0)$, $C(0,2,0)$ şi $D(1,1,2)$ sunt coplanare.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $2\ln^2 x-3\ln x+1=0$.

(3p) **b)** Să se calculeze suma $S=1+3+5+...+31$.

(3p) **c)** Să se calculeze numărul submulțimilor mulțimii $A=\{a,b,c,d\}$.

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca o cifră din primele 7 zecimale ale numărului $\frac{1}{7}$, să fie 1.

(3p) **e)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $6x^3-5x^2-1=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f', axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea M formată din toate polinoamele cu coeficienții din mulțimea $\{-1, +1\}$ şi cu toate rădăcinile reale.

(4p) **a)** Să se arate că $X-1 \in M$.

(4p) **b)** Să se arate că $X^2+X+1 \notin M$.

(4p) **c)** Să se arate că $\left(y_1 \cdot t - \frac{1}{y_1}\right)^2 + \left(y_2 \cdot t - \frac{1}{y_2}\right)^2 + \ldots + \left(y_n \cdot t - \frac{1}{y_n}\right)^2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\ldots+\frac{1}{y_n^2}\right) \geq n^2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}^*$.

(2p) **e)** Dacă $f \in M$ are rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, să se arate că $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=3$

(2p) **f)** Să se arate că orice polinom din mulțimea M are gradul mai mic sau egal decât 3.

(2p) **g)** Să se determine toate polinoamele din mulțimea M.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{3}\cos x$, $g(x)=x-f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ şirul definit prin $x_0 \in \mathbf{R}$, arbitrar şi $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $|f'(x)| \leq \frac{5}{6}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $|f(x)-f(y)| \leq \frac{5}{6}|x-y|$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția g este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că există un unic $u \in \mathbf{R}$ astfel încât $g(u)=0$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $|x_{n+1}-u| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \cdot |x_0-u|$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.