# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

***Varianta* ….015**

**Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică**

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

(4p) **a)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

(4p) **b)** Să se calculeze cosinusul unghiului format de vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ **.**

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 41$ dusă prin punctul $P(4,5)$ .

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(-1, 2)$, $M(-2, 3)$ și $N(-3, 4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,1,1)$ și $D(-1,-2,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\cos\pi + i\sin\pi)^{16} = a + bi$.

**SUBIECTUL II ( 30p )**

**1.**

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația $x^2 + 3x - 4 < 0$ .

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{2}\hat{x}$ .

(3p) **c)** Să se calculeze partea întreagă a numărului $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor strict pozitive ecuația $\log_2 x = 3$ .

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 + X^2 + 2$ .

**2.** Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4^x - 2^x$ .

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$ .

(3p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției $f$ .

(3p) **c)** Să se arate că $f(x) \geq -\frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ .

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 13} dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + A$.

**(4p)** **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei $A$.

**(4p)** **b)** Dacă $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze matricea $S = A - X \cdot Y$.

**(4p)** **c)** Să se verifice că $A^2 = 10A$.

**(2p)** **d)** Să se arate că matricea $B$ este inversabilă şi inversa sa este matricea $B^{-1} = I_3 - \dfrac{1}{11} A$.

**(2p)** **e)** Să se arate că $A^n = 10^{n-1} A$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

**(2p)** **f)** Să se găsească trei matrice $U, V, W \in M_3(\mathbf{C})$ de rang 1, astfel încât $B = U + V + W$.

**(2p)** **g)** Să se arate că oricare ar fi două matrice, $C, D \in M_3(\mathbf{C})$ de rang 1, avem $C + D \neq B$.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcţiile $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f_0(x) = 1 - \cos x$ şi

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

**(4p)** **a)** Să se verifice că $f_1(x) = x - \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**(4p)** **b)** Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

**(2p)** **c)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$f_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots + (-1)^n \frac{x}{1!} + (-1)^{n+1} \sin x, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

**(4p)** **d)** Să se arate că graficul funcţiei $f_1$ nu are asimptotă spre $+\infty$.

**(2p)** **e)** Să se arate că $0 \leq f_n(x) \leq 2 \cdot \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x > 0$. (Reamintim că 0!=1)

**(2p)** **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x > 0$.

**(2p)** **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \left( \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.