EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* …027**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+2i}{3-2i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2,4)$ la punctul $E(2,3,9)$.

(4p) **c)** Să se arate că $\sin 45^\circ \notin \mathbf{Q}$.

(4p) **d)** Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa de ecuație $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ și dreapta de ecuație $x+y=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,-1,2)$, $B(-1,2,1)$, $C(2,1,-1)$ și $D(1,2,4)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\left(\cos 1^\circ + i\sin 1^\circ\right)^{360} = a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $\log_2 3 < 2$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n\in\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $3^n+4^n\ge 7^n$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x+5$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(8)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3+5x-6=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^4-X-8$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x-arctgx$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3+1}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{C}^*$ şi

mulțimile $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M_2}(\mathbf{C}) \,\middle|\, a + d = 0 \right\}$ şi $N = \left\{ X \in \mathbf{M_2}(\mathbf{C}) \mid X^2 = O_2 \right\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A \in N$ şi $B \in N$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se găsească o matrice $C \in M$, cu proprietatea $C \notin N$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $X \in N$ atunci $X \in M$.

(2p) **e)** Să se verifice că matricea U este inversabilă şi $U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

(2p) **f)** Dacă $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M_2}(\mathbf{C})$ cu $c \cdot d \neq 0$ şi $V = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} & 1 \\ 0 & \frac{d}{c} \end{pmatrix}$, să se calculeze $V \cdot D \cdot V^{-1}$.

(2p) **g)** Să se arate că orice matrice $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ cu $ac \neq 0$ se scrie ca sumă de două matrice din mulțimea N.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \sin x$ şi integralele $I_n = \int_0^{2006} \sin(x^n)\,dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $x \geq \sin x$, $\forall x \geq 0$.

(4p) **c)** Să se calculeze I_1.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \sin(x^n)\,dx = 0$.

(2p) **e)** Utilizând metoda integrării prin părți , să se arate că

$$\int_1^{2006} \frac{\cos(x^n)}{x^n}\,dx = \frac{\cos 1}{n-1} - \frac{\cos(2006^n)}{(n-1)\cdot 2006^{n-1}} - \frac{n}{n-1}\int_1^{2006} \sin(x^n)\,dx,\ \ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ n \geq 2.$$

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{2006} \frac{\cos(x^n)}{x^n}\,dx = 0$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.