EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta …036

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sqrt{7} + i\sqrt{2}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,3,5)$ la planul $x + 3y + 5z + 7 = 0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2 + 5y^2 = 6$ în punctul $P(1,1)$.

(4p) **d)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j}$

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, și $C(4, 4)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 = a + bi \ .$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\sqrt{0,999}$ cu două zecimale exacte.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $3^n + 4^n > 5^n$.

(3p) **c)** Să se calculeze suma $C_{10}^0 + C_{10}^1 + ... + C_{10}^{10}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 3) = \log_2(2x^2 + x + 1)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - \cos x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f'(x)}{2 + f(x)} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z_3})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \middle|\ \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z_3} \right\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G$

(4p) **b)** Să se arate că dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z_3}$ şi $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ şi $A \cdot B \in G$

(2p) **d)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G .

(2p) **e)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$ astfel încât $A \cdot B = I_2$.

(2p) **f)** Să se arate că operațiile de adunare şi înmulțire a matricelor determină pe mulțimea G o structură de corp.

(2p) **g)** Să se dea un exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{2006}$ şi

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad , \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^{2007} - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$

(4p) **c)** Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$

(2p) **e)** Să se arate că funcția F este bijectivă

Notăm cu $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ inversa funcției F şi cu $a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2007}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\int_0^a g(x)\,dx = a - \frac{2007}{2008}$.

(4p) **g)** Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x}$.