EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….038

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine conjugatul numărului complex $z = i^{10} + i^{11}$.

(4p) **b)** Să se determine valorile lui $a \in \mathbf{R}$ din egalitatea de numere complexe $1 + (a \cdot i)^2 = 0$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin 2\pi + \sin 4\pi$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin 2\pi \cdot \sin 4\pi$.

(2p) **e)** Să se determine $c, d \in \mathbf{R}$ știind că punctele $A(c,1), B(2,d)$ sunt situate pe dreapta de ecuație $2x - y - 3 = 0.$

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de punct $M(a,b)$ situat pe parabola de ecuație $y^2 = 4x$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Știind că $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 6$,să se arate că $b - a \in \mathbf{N}$.

(3p) **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$.

(3p) **c)** Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ să se arate că $\det A = \det B$.

(3p) **d)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$, să se calculeze $f(f(1))$.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de mulțime care are exact 8 submulțimi .

2.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

(3p) **b)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$, să se calculeze $f'(0)$.

(3p) **c)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)^2$, să se arate că funcția f are un singur punct de extrem local .

(3p) **d)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$, să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de funcție continuă $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ pentru care $\int_0^1 f(x)\,dx < 1.$

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in \mathbf{R}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $U=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se determine $x,y\in \mathbf{R}$ astfel ca $A=xI_2+yU$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei U.

(4p) **c)** Să se calculeze U^2 şi U^3.

(2p) **d)** Să se calculeze U^{2007}.

(2p) **e)** Să se arate că $A^n=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}I_2+\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}U$, $n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $X\in M_2(\mathbf{R})$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, atunci există $u,v\in \mathbf{R}$ astfel ca $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

(2p) **g)** Să se rezolve în $M_2(\mathbf{R})$ ecuaţia $X^{2007}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}x^2-x\right)\cos nx\,dx$,

$b_n=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}$ şi funcţiile $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, $g:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{2\pi}x^2-x$,

$g(x)=f(x)\cdot ctg\frac{x}{2}$, $\forall x\in(0,\pi]$ şi $g(0)=-2$.

(4p) **a)** Să se calculeze a_0.

(4p) **b)** Să se arate că $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se arate că $b_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}x^2-x\right)\sum_{k=1}^{n}\cos kx dx$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice şi formula $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$, să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2}\left(\sin nxctg\frac{x}{2}+\cos nx-1\right),\ \forall n\in\mathbf{N}^*,\ \forall x\in\mathbf{R}\setminus 2\pi\mathbf{Z}.$$

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $h:[0,\pi]\to\mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă, atunci avem: $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}h(x)\cos nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}h(x)\sin nx\,dx=0$.

(2p) **f)** Să se arate că funcţia g este derivabilă şi cu derivata continuă pe intervalul $[0,\pi]$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty}b_n=\dfrac{\pi^2}{6}$.