EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….044**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$.

(4p) **b)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

(4p) **c)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $z=(1+i)^2-(1-i)^2$.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,0)$, $B(0,5)$ și $C(-2,5)$.

(2p) **e)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ și $\vec{w}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

(2p) **f)** Să se calculeze distanța dintre dreapta $x+2y-1=0$ și punctul $A(-2,\ 0)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă $f:\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$, să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

(3p) **b)** Să se determine câte numere de forma $\overline{abc}$ există, cu $a,b,c\in\{1,2\}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x}-3\cdot 2^{2x}-4=0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{Z}_4$ ecuația $\hat{x}^4=\hat{x}$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element n al mulțimii $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ să verifice relația $\log_2 n\geq\frac{n-1}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.

(3p) **a)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că $f(x)\leq\frac{1}{4}$, $\forall\ x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^2 f(t)dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricile $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ şi mulţimea $M = \{M(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$.

(4p) **a)** Să se verifice ca $E \in M$, $E^2 \in M$ şi $E^3 \in M$.

(4p) **b)** Să se arate că E este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

(2p) **c)** Să se arate că $M(a,b,c) = aI_3 + bE + cE^2$, $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\det(M(a,b,c)) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $a + b + c \geq 0$, atunci $\det(M(a,b,c)) \geq 0$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $X \in M_3(\mathbf{R})$ şi $X \cdot E = E \cdot X$, atunci $X \in M$.

(2p) **g)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$, există $a_n, b_n, c_n \in \mathbf{R}$,astfel încât $(M(a,b,c))^n = M(a_n, b_n, c_n)$ şi $a_n + b_n + c_n = (a+b+c)^n$.

(2p) **h)** Să se rezolve ecuaţia $X^{2007} = E$ în mulţimea $M_3(\mathbf{Z})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră integralele $I_0(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt$ şi $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$, unde $x \in [0,1]$ şi $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $I_0(x)$, $x \in [0,1]$.

(4p) **b)** Să se arate că $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se arate că $0 \leq I_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in [0,1]$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} I_n(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

(2p) **e)** Să se arate că $I_n(x) + I_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$.

(2p) **f)** Să se arate că

$$I_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x}{1} + (-1)^n I_0(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in [0,1].$$

(2p) **g)** Să se arate că $\ln(1+x) = \lim\limits_{n \to \infty}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \right)$, $\forall x \in [0,1]$.