EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….050**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $-4-3i$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3,-2)$ și $C(4,-3)$.

(4p) **c)** Să se calculeze suma de numere complexe $S=i+i^3+i^5+i^7$.

(4p) **d)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3,-2)$ și $C(4,-3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3,-2)$, $B(2,2)$ și $C(4,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine distanța de la punctul $O(0,0)$ la dreapta $x+y-1=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze elementul $\hat{2}^{10}$ în $(\mathbb{Z}_8,\cdot)$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $E=C_8^3-C_8^5$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $log_5 x=1$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x-32=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n>19$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{15}+2x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}+3}{5\sqrt{n}-2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $G = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid A \cdot A^T = I_2\}$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A.

(4p) **a)** Să se arate că $I_2 \in G$ şi $C \in G$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A \in G$, atunci matricea A este inversabilă şi $A^{-1} \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor .

(2p) **e)** Să se arate că funcția $f : G \to \{-1, 1\}$, $f(A) = \det(A)$ este surjectivă dar nu este injectivă.

(2p) **f)** Să se arate că mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R} \right\}$ este un subgrup al lui G.

(2p) **g)** Să se dea exemplu de subgrup al lui G care are 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $g : [0,1] \to \mathbf{R}$, $h : [0,1] \to \mathbf{R}$, $G : [0,1] \to \mathbf{R}$, definite prin

$g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\forall x \in (0,1]$, $g(0) = 1$, $f(x) = \ln(1+x) - x$, $h(x) = f(x) + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \in [0, 1]$,

$G(x) = \int_0^x g(t)dt$, $\forall x \in [0,1]$ şi şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$ şi $h'(x)$, $x \in [0,1]$.

(4p) **b)** Să se arate că $f'(x) \leq 0$ şi $h'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$.

(4p) **c)** Să se arate că $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, $\forall x \in [0,1]$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția g este continuă pe intervalul $[0,1]$.

(2p) **e)** Să se arate că $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2p) **f)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $n \cdot a_n = G(1) - \int_0^1 G(x^n)dx$, $\forall n \geq 1$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = G(1)$.