EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**052**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$.

(4p) **b)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

(4p) **c)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $z = (1+i)^2 - (1-i)^2$.

(4p) **d)** Să se calculeze lungimea înălțimii din B a triunghiului ABC, dacă $AB = 10$, $BC = 24$, $CA = 26$.

(2p) **e)** Să se calculeze cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$.

(2p) **f)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta $2x + 4y = 3$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

(3p) **b)** Să se determine câte numere de forma $\overline{abc}$ există, cu $a, b, c \in \{1, 2\}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x} - 3\cdot 2^{2x} - 4 = 0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în $\mathbf{Z}_3$ ecuația $\hat{x}^4 = x$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $\log_2 n \geq \frac{n-1}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

(3p) **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că $f(x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulţimea $A=\{1, 2, ..., 10\}$ şi $P(A)$ mulţimea tuturor submulţimilor sale.
Dacă $X, Y \in P(A)$, notăm prin $X\Delta Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$.

(4p) **a)** Să se determine numărul elementelor mulţimii $P(A)$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $X, Y \in P(A)$, atunci $(X\cup Y)-(X\cap Y)\in P(A)$.

(2p) **c)** Să se verifice că $X\Delta X=\varnothing$, $\forall X\in P(A)$.

(2p) **d)** Să se verifice că $X\Delta\varnothing=\varnothing\Delta X=X$, $\forall X\in P(A)$.

(2p) **e)** Să se arate că $X\Delta Y=Y\Delta X$, $\forall X, Y\in P(A)$.

(2p) **f)** Considerând cunoscut că $(X\Delta Y)\Delta Z=X\Delta(Y\Delta Z)$, $\forall X, Y, Z\in P(A)$, să se arate că $(P(A), \Delta)$ este un grup comutativ.

(2p) **g)** Să se rezolve în $P(A)$ ecuaţia $\{1, 2, 3, 4, 5\}\Delta X\Delta\{6, 7, 8, 9, 10\}=A$.

(2p) **h)** Dacă $P(A)=\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, să se calculeze $X_1\Delta X_2\Delta ...\Delta X_n$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $n\in \mathbf{N}^*$, $x_1, x_2, ..., x_n\in(0,\infty)$, $a\in(0,\infty)$, $h_k=\dfrac{k}{\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_k}}$, $\forall k\in\{1, 2, ..., n\}$

şi funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=n^2x^2-(4n-1)ax+4a^2$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x>0$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x)>0$, $\forall x>0$.

(4p) **c)** Să se arate că $\dfrac{4}{x}+\dfrac{n^2}{a}>\dfrac{(n+1)(n+3)}{a+x}$, $\forall x>0$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+...+\frac{n}{a_1+a_2+...+a_n}+\frac{n^2}{2(a_1+a_2+...+a_n)}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right),\ \forall n\in\mathbf{N}^*,$$

$\forall a_1, a_2, ..., a_n\in(0,\infty)$.

(2p) **e)** Să se deducă inegalitatea $h_1+h_2+...+h_n<2(x_1+x_2+...+x_n)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}}=1.$

(2p) **g)** Să se determine cel mai mic $c>0$ astfel încât pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de numere strict pozitive şi orice $n\in\mathbf{N}^*$ să avem $h_1+h_2+...+h_n<c(x_1+x_2+...+x_n)$.