EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….057

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

(4p) **c)** Să se arate că punctul $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ este situat pe cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.

(4p) **d)** Să se determine ecuația tangentei în punctul $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ la cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(0, 1, 2)$, $B(1, 0, 2)$, $C(2, 1, 0)$ și $O(0,0,0)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $P(2,3)$ și $Q(3,2)$ să fie situate pe dreapta $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$, $\hat{x} \in \mathbf{Z_4}$.

(3p) **b)** Să se determine $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $C_n^2 = 2n$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^7 + 1$ are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 7) = \log_2(2x^2 + 3x + 7)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = 3X^3 - 6X^2 + 24X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 9) - \ln(x^2 + 4)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se arate că $0 < f(x) \leq \ln\frac{9}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

precum şi submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbf{C} \right\}$, unde prin $\overline{z}$ am notat

conjugatul numărului complex z.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $O_2 \in G$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că dacă $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$, atunci $z \cdot \overline{z}$ este un număr real.

(4p) **c)** Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{vmatrix}$ este un număr real.

(2p) **d)** Să se găsească o matrice $X \in G$, cu proprietatea că $X \cdot J \neq J \cdot X$, unde $J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $A \neq O_2$, atunci A este matrice inversabilă şi $A^{-1} \in G$.

(2p) **f)** Să se arate că ecuația $X^2 = -I_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea G.

(2p) **g)** Să se dea un exemplu de corp necomutativ .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1 + x) - x$ şi şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, cu termenul general $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{a + x^n} dx$, $\forall\, n \geq 1$, unde a este o constantă reală strict pozitivă.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x > -1$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(0)$ *și* $f'(0)$.

(4p) **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

(2p) **d)** Să se deducă inegalitatea $\ln(1 + x) \leq x, \quad \forall x > -1$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\frac{x}{a + x} \leq \frac{x}{a}$, $\forall\, x \geq 0$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{I_n}{n}$

(2p) **f)** Utilizând metoda integrării prin părți , să se arate că

$$I_n = \ln\frac{a+1}{a} - \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx \quad , \quad \forall n \geq 1.$$

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.