EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….058**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine conjugatul numărului complex $z = i^{10} + i^{11}$.

(4p) **b)** Să se determine $x \in \mathbf{R}$ ştiind că are loc egalitatea de numere complexe $(1 + x \cdot i)^2 = 1$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{2}$.

(2p) **e)** Să se determine $c, d \in \mathbf{R}$ ştiind că punctele $P(c,1), Q(2,d)$ sunt situate pe dreapta de ecuație $2x - y - 3 = 0.$

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de punct $M(a,b)$ situat pe parabola de ecuație $y^2 = 9x$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Știind că $a = \log_2 24$ şi $b = \log_2 6$, să se arate că $a - b$ este un număr natural.

(3p) **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{vmatrix}$.

(3p) **c)** Dacă $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ a & 3 \end{pmatrix}$, să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât rang $(A) =$ rang (B).

(3p) **d)** Dacă $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, să se calculeze $(f \circ f)(1)$.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de mulțime care are exact 4 submulțimi .

2.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

(3p) **b)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$, să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^4$ este concavă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x - 2)^2$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{C})$, unde $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, notăm

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se arate că există $x,y,z,t\in\mathbf{R}$, astfel ca $A=xE+yI+zJ+tK$.

(4p) **b)** Să se arate că $\det(A)=a^2+b^2+c^2+d^2$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $det(A)=0$, atunci $A=O_2$.

(2p) **d)** Să se arate că $I^2=J^2=K^2=-E$, $I\cdot J=-J\cdot I=K$, $J\cdot K=-K\cdot J=I$, $K\cdot I=-I\cdot K=J$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $A\neq O_2$, atunci A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

(2p) **f)** Dacă $A'=\begin{pmatrix} a'+ib' & c'+id' \\ -c'+id' & a'-ib' \end{pmatrix}$ să se arate că

$$A\cdot A'=(aa'-bb'-cc'-dd')E+(ab'+ba'+cd'-dc')I+$$
$$+(ac'-bd'+ca'+db')J+(ad'+bc'-cb'+da')K$$

(2p) **g)** Știind că $\det(X\cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y)$, $\forall X,Y\in M_2(\mathbf{C})$, să se deducă relația

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)=(aa'-bb'-cc'-dd')^2+$$
$$+(ab'+ba'+cd'-dc')^2+(ac'-bd'+ca'+db')^2+(ad'+bc'-cb'+da')^2.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_a:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_a(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$, unde $a\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x)$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că f_a este continuă pe **R** dacă şi numai dacă $a=1$.

(4p) **c)** Să se calculeze $f_a'(x)$, $x\in\mathbf{R}^*$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că f_a este derivabilă pe **R** dacă şi numai dacă $a=1$.

(2p) **e)** Să se demonstreze inegalitatea $\dfrac{2}{\pi}\leq f_a(x)<1$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ şi $a\in\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se demonstreze inegalitatea $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\,dx<1+\cos 1$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x}\dfrac{f_1(t)}{t}\,dt$.