EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**063**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{3}+i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1,-2,-3)$ la punctul $E(-4,-5,-6)$.

(4p) **c)** Să se determine produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2,0)$, $M(2,3,0)$ și $N(3,4,0)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,3)$, $B(-1,4)$, și $C(2,1)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{2+3i}{4-2i}=a+bi\ .$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\hat{3}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_5$.

(3p) **b)** Să se determine al cincilea termen al unei progresii aritmetice cu primul termen egal cu 1 și cu rația 2.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+x+1$ are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(3)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3+x=10$.

(3p) **e)** Să se determine suma tuturor rădăcinilor polinomului $f=X^4+X^3-X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1\frac{x^2}{x^3+10}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi

mulțimea $C(A)=\{X\in M_3(\mathbb{C})\mid X\cdot A=A\cdot X\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) **b)** Să se determine rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbf{C}$, astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{pmatrix}=I_3$

(2p) **d)** Să se arate că dacă $U,V\in C(A)$, atunci $U\cdot V\in C(A)$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b,c\in\mathbf{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\3c&0&a\end{pmatrix}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $Y\in C(A)$ şi $Y^2=O_3$, atunci $Y=O_3$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $Z\in C(A)$ şi $Z^{2007}=O_3$, atunci $Z=O_3$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3+\{x\}(1-\{x\})$ şi $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real *x*.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x+1)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f este continuă în punctul $x=1$.

(4p) **c)** Să se verifice că $F(x)=3x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$, $\forall x\in[0,1)$.

(2p) **d)** Să se arate că $3\le f(x)\le 4$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$.

(2p) **g)** Să se arate că există $a\in\mathbf{R}$, astfel încât funcția $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $G(x)=F(x)-ax$ să fie periodică, având o perioadă egală cu 1.