EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**066**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{3}+2i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,\ 2,3)$ la punctul $E(3,\ 2,1)$

(4p) **c)** Să se scrie ecuația cercului cu centrul în punctul $C(1,\ 2)$ şi raza 2.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1,\ 2)$, $B(2,\ 3)$, $C(3,\ 2)$.

(2p) **e)** Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $L(1,2,3)$, $M(3,1,2)$ şi $N(2,3,1)$ să aparțină planului $x+ay+bz+c=0$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\left(\sqrt{2}+i\sqrt{5}\right)^2 = a+bi .$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numărul polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2 din $\mathbf{Z}_3[X]$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$ să verifice relația $\hat{x}^4 = \hat{1}$.

(3p) **c)** Să se determine numărul de termeni raționali din dezvoltarea binomului $\left(2+\sqrt{3}\right)^{20}$

(3p) **d)** Să se compare numerele $\log_2 3$ şi $\log_3 2$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f = X^3 + X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + x^2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi funcţia $f: M_2(\mathbf{R})\to M_2(\mathbf{R})$, $f(X)=AX+XA$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(O_2)$ şi $f(I_2)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(aX)=af(X),\ \forall X\in M_2(\mathbf{R})$ şi $\forall a\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(X+Y)=f(X)+f(Y),\ \forall X,Y\in M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **e)** Să se găsească o bază a spaţiului vectorial $(M_2(\mathbf{R}),+)$ peste corpul de scalari **(R,+,·)**.

(2p) **f)** Să se arate că ecuaţia $f(X)=O_2$ are soluţie unică în $M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **g)** Să se arate că funcţia f este bijectivă.

SUBIECTUL IV (20p)

(4p) **a)** Să se verifice că $\dfrac{1}{1-a}=1+a+\ldots+a^n+\dfrac{a^{n+1}}{1-a},\quad \forall n\in\mathbf{N}$ şi $\forall a\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

(4p) **b)** Să se deducă relaţia

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}=1-\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\ldots+(-1)^n\left(\sqrt[3]{x}\right)^n+(-1)^{n+1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[3]{x}},\ \forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbf{N}.$$

(4p) **c)** Să se arate că $0\le\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[3]{x}}\le\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n+1},\quad \forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^b\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=0,\ \forall b\in[0,1]$.

(2p) **e)** Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^b\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$, unde $b>0$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\dfrac{(-1)^1x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\dfrac{(-1)^2x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\ldots+\dfrac{(-1)^nx^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1}\right)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+\sqrt[3]{t}}dt$,

$\forall x\in[0,1]$.

(2p) **g)** Să se arate că există $x\in(0,1)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{(-1)^1x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{(-1)^2x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1}\right)\in\mathbf{Q}.$$