EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….069**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{1+2i}{4+3i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1,-2,-3)$ la punctul $E(1,\ 2,\ 3)$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=25$ dusă prin punctul $P(4,\ 3)$.

(4p) **d)** Să se arate că $\sin 4<0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1,1)$, $B(1,2)$, $C(2,1)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2+i)^2=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $C_{x+1}^{y+1}=C_x^{y+1}+C_x^y$, $\forall x,y\in\mathbf{N}^*$, $x>y$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^2+\hat{x}+\hat{4}=\hat{0}$.

(3p) **c)** Să se determine numărul funcțiilor bijective definite pe mulțimea $\{1,2,3\}$ cu valori în mulțimea $\{5,6,7\}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x-5^x-20=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul tuturor rădăcinilor polinomului $f=X^4+X^3-X^2+X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+x^2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se arate că $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Spunem că matricea $M \in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă*, dacă există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $M^n = O_2$.

(4p) **a)** Să se verifice că matricele O_2 şi J sunt *nilpotente.*

(4p) **b)** Să se arate că matricea K nu este nici inversabilă nici *nilpotentă.*

(4p) **c)** Să se arate că, dacă matricea $X \in M_2(\mathbf{R})$, $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, atunci avem identitatea $X^2 - (p+s)X + (ps - rq)I_2 = O_2$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ verifică relaţia $A^2 = O_2$, atunci $a + d = 0$ şi $ad - bc = 0$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă matricea $B \in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă,* atunci $B^2 = O_2$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ sunt *nilpotente* şi $A \cdot B = B \cdot A$, atunci $A + B$ este *nilpotentă.*

(2p) **g)** Să se arate că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice *nilpotente.*

SUBIECTUL IV (20p)

(4p) **a)** Să se verifice că $\dfrac{1}{1-a} = 1 + a + ... + a^n + \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ şi $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

(4p) **b)** Să se deducă relaţia

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 - ... + (-1)^n \left(\sqrt{x}\right)^n + (-1)^{n+1} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}}, \quad \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}.$$

(4p) **c)** Să se arate că $0 \le \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}} \le \left(\sqrt{x}\right)^{n+1}$, $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^b \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx = 0$, $\forall b \in [0,1]$.

(2p) **e)** Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$, unde $b > 0$.

(2p) **f)** Să se arate că

$$\lim_{n \to \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + ... + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

(2p) **g)** Să se arate că există $x \in (0,1)$ astfel încât

$$\lim_{n \to \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + ... + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right) \in \mathbf{Q}.$$