EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….073**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $i^{200}+i^{201}+i^{202}+i^{203}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2)$ la dreapta $x+y+4=0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2+y^2=9$ și dreapta de ecuație $x=-y$.

(4p) **d)** Să se determine numărul real a astfel încât punctele $L(-1,-2)$, $M(-2,-3)$ şi $N(-3,a)$ să fie coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1,1)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$(1+i)^{10}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $M_2(\mathbf{Z_3})$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $x\in\{0,1,2,3,4\}$ să fie soluție a ecuației

$x(x-1)(x-2)(x-3)=0$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(0)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}-3^x-2=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze numărul de submulțimi cu număr impar de elemente, ale mulțimii $\{a,b,c,d,e\}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f pe intervalul $(0,2\pi)$.

(3p) **d)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f pe intervalul $(0,2\pi)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in \mathbf{C}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$ şi formulele $1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$, $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$ şi $2\sin a \cos a = \sin 2a$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $\forall x \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$.

(4p) **c)** Să se arate că rădăcinile polinomului f sunt $x_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}$

(2p) **d)** Să se verifice că $f = (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$.

(2p) **e)** Să se arate identitatea $n = (1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_{n-1})$.

(2p) **f)** Să se arate că $\sin\dfrac{\pi}{n} \cdot \sin\dfrac{2\pi}{n} \cdot ... \cdot \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

(2p) **g)** Să se arate că $\sin\dfrac{\pi}{2n} \cdot \sin\dfrac{2\pi}{2n} \cdot ... \cdot \sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ şi şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $b_n = a_n - f(n)$, $c_n = a_n - f(n+1)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(2p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall k \geq 1$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(k+1)^2} - \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{k^2} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$, $\forall k \geq 1$.

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 2}$ este strict descrescător iar şirul $(c_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător.

(2p) **f)** Să se arate că şirurile $(b_n)_{n\geq 2}$ şi $(c_n)_{n\geq 2}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită .

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) **h)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3}}\right)$.