EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….075**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)^4$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,5)$ la dreapta $x-y+5=0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $x^2-5y^2=20$ dusă prin punctul $P(5,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2,3)$, $M(2,3,4)$ și $N(3,4,5)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(-1,1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(2,-1,1)$ și $D(4,5,6)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(3-i)^3=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, $\forall\, x>0$

(3p) **b)** Să se arate că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{99\cdot 100}<1$

(3p) **c)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z_4}$ să verifice relația $\hat{x}^3=\hat{x}^2$

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x+3^x=12$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f=X^4-X^2-24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2^{-x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră o funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care are proprietăţile $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ şi $f(1) = 1$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(0) = 0$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, avem $f(a_1 + a_2 + ... + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)$.

(2p) **d)** Să se arate că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\forall\ a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, există $r \in \mathbf{Q}$, astfel încât $a < r < b$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă funcţia f este monotonă pe $\mathbf{R}$, atunci $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{2}{3}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$,

$b_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi funcţiile $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$,

$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{5}{3}\right) + \ln\left(x + \frac{2}{3}\right)$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x > 0$.

(4p) **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(4p) **c)** Să se verifice că $f'(x) > 0, \forall x > 0$ şi $g'(x) < 0, \forall x > 0$.

(2p) **d)** Utilizând rezultatele de la punctele **b)** şi **c)**, să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall x > 0$.

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător şi şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

(2p) **f)** Să se arate că $0 < b_n - a_n < \frac{1}{6n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.