EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….082**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+2i}{3-2i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,\ 2,\ 4)$ la punctul $E(2,\ 3,\ 9)$

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$.

(4p) **d)** Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa de ecuație $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ şi dreapta de ecuație $x+y=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,-1,2)$, $B(-1,2,1)$, $C(2,1,-1)$ şi $D(1,2,4)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\left(\cos 1^\circ + i\sin 1^\circ\right)^{360} = a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $\log_2 3 > 1{,}5$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n\in\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $3^n+4^n\ge 7^n$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x+5$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(8)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3+5x-6=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^4-X-8$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x-\operatorname{arctg} x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3+1}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulţimea $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z}_5)$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \middle| \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z_5} \right\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G$.

(4p) **b)** Să se arate că , dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z_5}$ şi $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.

(4p) **c)** Să se arate că , dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ şi $A \cdot B \in G$.

(2p) **d)** Să se determine numărul de elemente din mulţimea G .

(2p) **e)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = I_2$.

(2p) **f)** Să se arate că operaţiile de adunare şi de înmulţire a matricelor determină pe mulţimea G o structură de corp comutativ.

(2p) **g)** Să se dea un exemplu de structură de corp cu 9 elemente .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ş i $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, cu $a_n = \frac{1}{3^{1^2}} + \frac{1}{3^{2^2}} + ... + \frac{1}{3^{n^2}}$ şi

$b_n = a_n + \frac{1}{3n \cdot 3^{n^2}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se verifice că şirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

(4p) **b)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

(4p) **c)** Să se arate că şirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ şi $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt mărginite .

(2p) **d)** Să se arate că şirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ şi $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.

(2p) **e)** Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ limita şirului $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ .Să se arate că numărul a este iraţional.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^{2007}}{3^{n^2}} = 0$.

(2p) **g)** Să se arate că nu există polinoame nenule $f, g \in \mathbf{R}[\mathbf{X}]$, cu proprietatea că $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.