EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….083**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(3,1,2)$ și $B(2,3,1)$.

(4p) **b)** Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(1,2)$, $B(3,4)$ şi $M(0,x)$ să fie coliniare.

(4p) **c)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $z = \dfrac{1}{3+4i}$.

(4p) **d)** Să se determine aria unui triunghi echilateral cu perimetrul egal cu 3.

(2p) **e)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care dreptele de ecuații $x+y+2=0$ și $3x+ay+5=0$ sunt paralele.

(2p) **f)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $3x+y=0$ și cercul de ecuație $x^2+y^2=10$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $\lg\dfrac{2}{1}+\lg\dfrac{3}{2}+\lg\dfrac{4}{3}+\ldots+\lg\dfrac{10}{9}=1$.

(3p) **b)** Să se determine probabilitatea ca un element din $\mathbf{Z}_6$ să fie inversabil față de operația de înmulțire.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $A_x^2=20$, pentru $x \in \mathbf{N}$, $x \geq 2$.

(3p) **d)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului $f = X^4 + X^2 + 2$ la polinomul $g = X^2 + X + 1$.

(3p) **e)** Se consideră progresia geometrică $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, cu $a_1=1$ şi $a_2=2$. Să se calculeze a_{10}.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x - x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(0)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \ldots + \frac{X(X+1)(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+n-1)}{n!} \in \mathbf{C}[X]$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A \in M_3(\mathbf{C})$, cu $A^4 = O_3$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_n(0)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_n(-1)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f_n = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că polinomul f_n are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, ..., $x_n = -n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $(I_3 - x\cdot A)\left(I_3 + x\cdot A + x^2\cdot A^2 + x^3\cdot A^3\right) = I_3$, $\forall\, x \in \mathbf{C}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\det(I_3 - x\cdot A) = 1$, $\forall\, x \in \mathbf{C}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\det\left(f_3(A)\right)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ şi şirurile

$x_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\quad I_n(\alpha) = \int_1^n f(x)\,dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \geq 1$.

(4p) **c)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} \infty, & \alpha \in (0,1] \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \end{cases}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq \frac{1}{(n-1)^\alpha}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

(2p) **e)** Să se arate că $x_n(\alpha) - 1 \leq I_n(\alpha) \leq x_{n-1}(\alpha)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$..

(2p) **f)** Să se arate că şirul $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent pentru $\alpha \in (0,1]$ şi convergent pentru $\alpha > 1$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(e^{x_{n+1}(1)} - e^{x_n(1)}\right) = e^c$, unde $c = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$.